



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Faculdade de Engenharia Mecânica

DANIEL CANDELORO CUNHA

Otimização Topológica na Concepção de Fluidoatuadores Celulares

CAMPINAS

2019

DANIEL CANDELORO CUNHA

Otimização Topológica na Concepção de Fluidoatuadores Celulares

Dissertação de Mestrado apresentada à Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica na área de Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO DANIEL CANDELORO CUNHA, E ORIENTADA PELO PROF. DR. RENATO PAVANELLO.

CAMPINAS

2019

Agência(s) de fomento e nº(s) de processo(s): CAPES, 33003017; FAPESP

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3633-1974>

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca da Área de Engenharia e Arquitetura
Rose Meire da Silva - CRB 8/5974

C914o Cunha, Daniel Candeloro, 1991-
Otimização topológica na concepção de fluídoatuadores celulares / Daniel Candeloro Cunha. – Campinas, SP : [s.n.], 2019.

Orientador: Renato Pavanello.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica.

1. Otimização topológica. 2. Multiescala. 3. Materiais compostos. I. Pavanello, Renato, 1959-. II. Universidade Estadual de Campinas. Faculdade de Engenharia Mecânica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: Topology optimization on the design of cellular fluid actuators

Palavras-chave em inglês:

Topology Optimization

Multiscale

Composite materials

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Projeto Mecânico

Titulação: Mestre em Engenharia Mecânica

Banca examinadora:

Renato Pavanello [Orientador]

Alberto Luiz Serpa

Eduardo Alberto Fancello

Data de defesa: 30-01-2019

Programa de Pós-Graduação: Engenharia Mecânica

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
DEPARTAMENTO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL**

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO

Otimização Topológica na Concepção de Fluidoatuadores Celulares

Autor: Daniel Candeloro Cunha

Orientador: Prof. Dr. Renato Pavanello

A Banca Examinadora composta pelos membros abaixo aprovou esta Dissertação:

Prof. Dr. Renato Pavanello

FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Alberto Luiz Serpa

FEM/UNICAMP

Prof. Dr. Eduardo Alberto Fancello

EMC/UFSC

A Ata da defesa com as respectivas assinaturas dos membros encontra-se no processo de vida acadêmica do aluno.

Campinas, 30 de Janeiro de 2019.

Dedico este trabalho a minha família: a meu pai, Mário Sérgio Cunha, por seu afeto e confiança, pelo apoio incondicional com o qual me reassegura e me dá coragem para ir adiante; a minha mãe, Marília Candeloro Cunha, por sua força e pragmatismo, pelo suporte sólido que me ampara e não me deixa retroceder; e a minha irmã, Amanda Candeloro Cunha, pela parceria e cumplicidade com que me acompanha em meus caminhos, tanto nos retos quanto nos tortuosos.

E aos amigos: Omar Darwiche Domingues, por compartilhar comigo a paixão pela ciência, pelas longas e acaloradas discussões; Evandro Souto Carobino, por nossa amizade pura e duradoura, pela companhia que me fez em cada etapa de minha vida; Júlia Fernanda Iwanaga, pela leveza cativante com que enxerga o mundo, por criar graça no comum e no inusitado; André Caetano Prado, pela solicitude implacável, por toda a ajuda que me deu, nos momentos mais críticos e nos mais banais; e Vitor Guedes dos Reis, pelos conflitos, desavenças e rivalidades, por sua humanidade, criticidade e lucidez, por tudo que me ensinou.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à FAPESP (Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo), projeto 2013/08293-7, e à CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pelo auxílio financeiro. Ao colega, Andrés Felipe Galvis Rodriguez, pela disponibilização de seus códigos, que muito contribuíram em minha iniciação ao Fortran. E a meu orientador, Professor Renato Pavanello, por ter direcionado, acompanhado e facilitado meu trabalho com sua competência, compreensão e bom humor.

A juventude está sendo exposta a uma doutrina perigosa, uma corrente de pensamento que já corrompeu parte alarmante de nossos compatriotas. Enaltecem essas ideias como se fossem solução para todos os problemas da sociedade. Pais desorientados as impõem sobre seus filhos, figuras públicas as propagam como sofistas, autoridades as instrumentalizam para manobrar as massas. Distorcem a história, o que era fato transforma-se em versão. A cada avanço inimigo, novas manchas de sangue redesenham nossa bandeira em vermelho. Um espectro ronda o Brasil – o espectro da intolerância.
(Perigo Vermelho, Daniel Candeloro Cunha)

RESUMO

Propôs-se desenvolver um programa de otimização topológica capaz de auxiliar no projeto de mecanismos bioinspirados, mais especificamente, fluidoatuadores celulares. Descreveu-se o problema físico, sua formulação para análise numérica e finalmente o procedimento de otimização. O modelo utilizado considera regimes de grandes deslocamentos e deformações; e carregamentos hidrostáticos dependentes tanto do campo de deslocamentos quanto da topologia. Trabalha-se, portanto, com problemas geometricamente não-lineares. O atuador é descrito por uma macrotopologia, que define a distribuição de células no macrodomínio; e por microtopologias, que definem a forma de cada célula.

Foram consideradas duas funções de performance para os atuadores: trabalho útil, medida da amplitude de atuação; e transmitância mecânica, medida de eficiência energética. A otimização foi feita para maximizar uma dessas duas funções. Três modalidades de otimização foram definidas: microescala, na qual se considera apenas uma célula isolada; macroescala, na qual a otimização multimaterial estabelece a macrotopologia do atuador, considerando que as microtopologias das células não se alteram; e multiescala, na qual as microtopologias do atuador celular podem ser otimizadas em conjunto com sua macrotopologia. Quando se trabalha com as estruturas celulares, utiliza-se um modelo representativo, em que cada célula corresponde a um único macroelemento.

Uma série de simulações foi realizada tanto para validar as formulações e implementações quanto para compreender as limitações e potencialidades dos modelos propostos e métodos utilizados. A validação foi bem sucedida. Apesar de o modelo representativo proposto ter se mostrado inadequado para trabalhar com a transmitância mecânica, o programa desenvolvido mostrou-se eficaz em todos os outros casos e capaz de ser utilizado numa vasta gama de problemas.

Algumas categorias de problemas foram abordadas: atuadores unicelulares, estruturas reativas, constritores radiais e atuadores articulados. Em todos os casos obtiveram-se resultados satisfatórios e o programa desenvolvido forneceu sistematicamente *designs* efetivos para os mecanismos considerados.

Palavras-chaves: otimização topológica; fluidoatuadores celulares; multiescala; multimaterial.

ABSTRACT

It was proposed the development of a topology optimization program to aid the project of bioinspired mechanisms, more specifically, cellular fluid actuators. The physical problem, its formulation for numerical analysis and ultimately the optimization procedure were described. Large displacements and strains were considered in the model, as well as hydrostatic loading, which is displacement dependent and also topology dependent. Therefore, the problems are geometrically nonlinear. The actuator is described by a macrotopology, which defines the cells' distribution over the macrodomain; and by microtopologies, which define each cell's shape.

Two performance functions were considered for the actuators: output work, a measure of actuation amplitude; and mechanical transmittance, a measure of energetic efficiency. The optimization was performed in order to maximize one of those functions. Three modalities of optimization were defined: microscale, where a single isolated cell is considered; macroscale, where a multimaterial optimization establishes the actuator's macrotopology, for unchanging microtopologies; and multiscale, where the cellular actuator's microtopologies may be optimized together with its macrotopology. When working with the cellular structures, a representative model is used, where each cell corresponds to a single macroelement.

A series of tests was performed to validate the formulations and implementations, and also to understand the limitations and potentialities of the proposed models and chosen methods. The validation was successful. Although the proposed representative model has been shown improper for working with mechanical transmittance, the developed program was effective for all other cases and it is suited to be used in a wide range of problems.

Some categories of problems were approached: unicellular actuators, reactive structures, radial constrictors and articulated actuators. The obtained results were satisfactory for all cases and effective designs for the considered mechanisms were systematically provided by the developed program.

Keywords: topology optimization; cellular fluid actuators; multiscale; multimaterial.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Movimento Náutico	15
Figura 2.1 – Microestruturas	23
Figura 2.2 – Macroestrutura	24
Figura 2.3 – Formulação do Problema Estrutural Estático	27
Figura 2.4 – Deformação de uma Fibra Material	29
Figura 2.5 – Deformações em uma Barra Unidimensional	32
Figura 2.6 – Comparação Unidimensional entre Modelos de Materiais	39
Figura 2.7 – Elemento Isoparamétrico de 4 Nós	43
Figura 2.8 – Elemento Isoparamétrico de 8 Nós	43
Figura 2.9 – Módulo de Young Equivalente	68
Figura 2.10–Pontos de Interesse	68
Figura 2.11–Carregamento Equivalente em Coordenadas Locais	70
Figura 3.1 – Fluxograma BESO	85
Figura 3.2 – Fluxograma BESO Macroescala	89
Figura 3.3 – Fluxograma BESO Multiescala	93
Figura 3.4 – Curvas de Penalização	96
Figura 3.5 – Fluxograma do Programa	105
Figura 4.1 – Viga Engastada-Livre	107
Figura 4.2 – Viga Engastada-Livre Deformada ($f_a = 5\text{ kN/m}$)	108
Figura 4.3 – Viga Bi-Apoiada	109
Figura 4.4 – Viga Bi-Apoiada Deformada ($f_a = 10\text{ kN/m}$)	110
Figura 4.5 – Estrutura Delgada	111
Figura 4.6 – Estrutura Delgada sob Carregamento Hidrostático	111
Figura 4.7 – Viga Bi-Engastada	112
Figura 4.8 – Viga Bi-Engastada sob Carregamento Hidrostático ($p_c = 500\text{ kPa}$)	112
Figura 4.9 – Viga para Validação da Sensibilidade	113
Figura 4.10–Validação do Mapa de Sensibilidade de α_c^x	114
Figura 4.11–Erro Entre Valores Analíticos e Numéricos de α_c^x	115
Figura 4.12–Célula para Validação da Sensibilidade Microescala	116
Figura 4.13–Validação do Mapa de Sensibilidade de α_t	117
Figura 4.14–Erro Entre Valores Analíticos e Numéricos de α_t	117
Figura 4.15–Atuador para Validação da Sensibilidade Macroescala	118
Figura 4.16–Validação do Mapa de Sensibilidade de α_o^y	119
Figura 4.17–Erro Entre Valores Analíticos e Numéricos de α_o^y	119
Figura 4.18–Atuador para Validação da Sensibilidade Multiescala	120
Figura 4.19–Validação do Mapa de Sensibilidade de $\alpha_t^{z[2]}$	121

Figura 4.20–Erro Entre Valores Analíticos e Numéricos de $\alpha_t^{z[2]}$	122
Figura 4.21–Sensibilidade Filtrada para Diferentes Raios	122
Figura 4.22–Viga Curta Engastada-Livre	123
Figura 4.23–Topologia Otimizada para a Viga Curta	124
Figura 4.24–Viga Bi-Apoiada Multi-Material	124
Figura 4.25–Topologia Otimizada para a Viga Biapoiada com 2 Materiais	124
Figura 4.26–Mecanismo Flexível	125
Figura 4.27–Mecanismo Flexível Simétrico	126
Figura 4.28–Topologia Otimizada para o Mecanismo Flexível	126
Figura 4.29–Topologia Inicial do Atuador para Análise do Modelo	127
Figura 4.30–Evolução da Função-Objetivo no Atuador para Análise do Modelo	127
Figura 4.31–Topologia Final do Atuador para Análise do Modelo	128
Figura 4.32–Topologia Inicial Deformada do Atuador para Análise do Modelo	129
Figura 4.33–Topologia Final Deformada do Atuador para Análise do Modelo	129
Figura 4.34–Microtopologias Iniciais do Segundo Atuador para Análise	130
Figura 4.35–Topologia Inicial do Segundo Atuador para Análise	131
Figura 4.36–Evolução da Função-Objetivo no Segundo Atuador para Análise	131
Figura 4.37–Microtopologias Finais do Segundo Atuador para Análise	132
Figura 4.38–Topologia Final do Segundo Atuador para Análise	132
Figura 4.39–Topologia Inicial Deformada do Segundo Atuador para Análise	133
Figura 4.40–Topologia Final Deformada do Segundo Atuador para Análise	133
Figura 4.41–Topologia Inicial dos Atuadores Unicelulares Considerados	134
Figura 4.42–Atuadores Unicelulares de Expansão Completa ($p_s = 1,10$, $p_p = 1,05$)	135
Figura 4.43–Atuadores Unicelulares de Expansão Completa ($p_s = 1,30$, $p_p = 0,70$)	136
Figura 4.44–Atuadores Unicelulares de Expansão Diagonal ($p_s = 1,10$, $p_p = 1,05$)	136
Figura 4.45–Atuadores Unicelulares de Expansão Diagonal ($p_s = 1,30$, $p_p = 0,70$)	137
Figura 4.46–Atuadores Unicelulares de Expansão Lateral ($p_s = 1,10$, $p_p = 1,05$)	137
Figura 4.47–Atuadores Unicelulares de Expansão Lateral ($p_s = 1,30$, $p_p = 0,70$)	138
Figura 4.48–Evolução da Função-Objetivo na Célula de Expansão Vertical e Horizontal	139
Figura 4.49–Célula de Expansão Vertical e Horizontal Deformada - Inicial	139
Figura 4.50–Célula de Expansão Vertical e Horizontal Deformada - Final	140
Figura 4.51–Células Utilizadas na Otimização Macroescala	140
Figura 4.52–Viga Engastada-Livre Reativa	141
Figura 4.53–Células da Otimização de Estruturas Reativas - Primeiro Caso	142
Figura 4.54–Macrotopologias da Otimização de Estruturas Reativas - Primeiro Caso	142
Figura 4.55–Células da Otimização de Estruturas Reativas - Segundo Caso	143
Figura 4.56–Macrotopologias da Otimização de Estruturas Reativas - Segundo Caso	143
Figura 4.57–Células Iniciais da Otimização de Estruturas Reativas - Terceiro Caso	144
Figura 4.58–Células Finais da Otimização de Estruturas Reativas - Terceiro Caso	144

Figura 4.59–Células Finais da Otimização de Estruturas Reativas - Quarto Caso	145
Figura 4.60–Macrotopologia Final da Otimização de Estruturas Reativas - Quarto Caso .	145
Figura 4.61–Viga Biapoiada Reativa	145
Figura 4.62–Macrotopologia da Otimização de Estruturas Reativas - Quinto Caso	146
Figura 4.63–Células Finais da Otimização de Estruturas Reativas - Quinto Caso	146
Figura 4.64–Células Finais da Otimização de Estruturas Reativas - Sexto Caso	146
Figura 4.65–Macrotopologia Final da Otimização de Estruturas Reativas - Sexto Caso . .	147
Figura 4.66–Evolução da Função-Objetivo na Estrutura Reativa - Sexto Caso	148
Figura 4.67–Curva de Correlação de Cargas na Estrutura Reativa - Sexto Caso	149
Figura 4.68–Estrutura Reativa Deformada - Sexto Caso (Inicial)	149
Figura 4.69–Estrutura Reativa Deformada - Sexto Caso (Final)	149
Figura 4.70–Constritor Radial de Pressão Diagonal	150
Figura 4.71–Células da Otimização de Constritores Radiais - Primeiro Caso	151
Figura 4.72–Macrotopologias da Otimização de Constritores Radiais - Primeiro Caso . .	151
Figura 4.73–Células Finais da Otimização de Constritores Radiais - Segundo Caso . . .	152
Figura 4.74–Macrotopologia Final da Otimização de Constritores Radiais - Segundo Caso	152
Figura 4.75–Células da Otimização de Constritores Radiais - Terceiro Caso	153
Figura 4.76–Macrotopologias da Otimização de Constritores Radiais - Terceiro Caso . .	153
Figura 4.77–Constritor Radial de Pressão Horizontal-Vertical	154
Figura 4.78–Macrotopologia Final da Otimização de Constritores Radiais - Quarto Caso	154
Figura 4.79–Células Finais da Otimização de Constritores Radiais - Quinto Caso	155
Figura 4.80–Macrotopologia Final da Otimização de Constritores Radiais - Quinto Caso	155
Figura 4.81–Macrotopologias da Otimização de Constritores Radiais - Sexto Caso	156
Figura 4.82–Evolução da Função-Objetivo no Constritor Radial - Sexto Caso	156
Figura 4.83–Célula de Expansão Vertical e Horizontal Deformada - Inicial	157
Figura 4.84–Célula de Expansão Vertical e Horizontal Deformada - Final	157
Figura 4.85–Atuador Pinça	158
Figura 4.86–Células da Otimização de Atuadores Articulados - Primeiro Caso	159
Figura 4.87–Macrotopologias da Otimização de Atuadores Articulados - Primeiro Caso .	159
Figura 4.88–Macrotopologia da Otimização de Atuadores Articulados - Segundo Caso .	160
Figura 4.89–Células Iniciais da Otimização de Atuadores Articulados - Segundo Caso . .	160
Figura 4.90–Células Otimizadas do Atuador Articulado - Segundo Caso	160
Figura 4.91–Células Otimizadas do Atuador Articulado - Terceiro Caso	161
Figura 4.92–Macrotopologia Otimizada do Atuador Articulado - Terceiro Caso	161
Figura 4.93–Atuador Articulado Deformado - Primeiro Caso (Inicial)	162
Figura 4.94–Atuador Articulado Deformado - Primeiro Caso (Final)	162
Figura 4.95–Atuador Articulado Deformado - Terceiro Caso (Inicial)	163
Figura 4.96–Atuador Articulado Deformado - Terceiro Caso (Final)	163

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Deslocamento na Extremidade Livre, Elemento Quad4	109
Tabela 4.2 – Deslocamento na Extremidade Livre, Elemento Quad8	109
Tabela 4.3 – Deslocamento Máximo na Seção Central	112
Tabela 4.4 – Sensibilidade Mínima e Erro Máximo para h_c	114
Tabela 4.5 – Sensibilidades e Erro Máximo para h_o e h_t Microescala	116
Tabela 4.6 – Sensibilidades e Erro Máximo para h_o e h_t Macroescala	119
Tabela 4.7 – Sensibilidades e Erro Máximo para h_o e h_t Multiescala	121
Tabela 4.8 – Valores de h_o e h_t no Atuador para Análise do Modelo	128
Tabela 4.9 – Valores de h_o e h_t no Segundo Atuador para Análise	132
Tabela 4.10–Valores de h_o nos Atuadores Unicelulares	138
Tabela 4.11–Valores de h_t nos Atuadores Unicelulares	138
Tabela 4.12–Valores de h_o nas Estruturas Reativas	147
Tabela 4.13–Correlação de Cargas na Estrutura Reativa - Sexto Caso	148
Tabela 4.14–Valores de h_o nos Constritores Radiais	156
Tabela 4.15–Valores de h_o nos Atuadores Articulados	161

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MEF	Método de Elementos Finitos
MDF	Método de Diferenças Finitas
ESO	<i>Evolutionary Structural Optimization</i>
BESO	<i>Bidirectional Evolutionary Structural Optimization</i>
MMA	<i>Method of Moving Asymptotes</i>
SIMP	<i>Solid Isotropic Material with Penalization</i>
RAMP	<i>Rational Approximation of Material Properties</i>
RMMI	<i>Recursive Multiphase Materials Interpolation</i>
UMMI	<i>Uniform Multiphase Materials Interpolation</i>
EPT	Estado Plano de Tensões
EPD	Estado Plano de Deformações
Quad4	Elemento Isoparamétrico Quadrangular de 4 Nós
Quad8	Elemento Isoparamétrico Quadrangular de 8 Nós
API	<i>Application Programming Interface</i>
CSR	<i>Compressed Sparse Row</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

E_y^0	Módulo de Young do sólido que compõe as microestruturas
$E_y^{[.]}$	Módulo de Young equivalente de um elemento representativo
ν^0	Coefficiente de Poisson do sólido que compõe as microestruturas
$\nu^{[.]}$	Coefficiente de Poisson equivalente de um elemento representativo
λ	Primeiro parâmetro de Lamé
λ_t	Primeiro parâmetro de Lamé modificado para considerar um estado plano de tensões
λ_d	Primeiro parâmetro de Lamé modificado para considerar um estado plano de deformações
μ	Segundo parâmetro de Lamé
μ_t	Segundo parâmetro de Lamé modificado para considerar um estado plano de tensões
μ_d	Segundo parâmetro de Lamé modificado para considerar um estado plano de deformações
ρ	Campo de densidades
ω	Espessura dos elementos
w_c	Espessura de parede celular
p_c	Pressão aplicada
f_a	Carga pontual aplicada
k	Constante de mola
\tilde{R}	Restrição mecânica
s	Vetor de posição na configuração de referência
r	Vetor de posição na configuração deformada
u	Campo de deslocamentos
\tilde{a}	Matriz de deslocamentos nodais

a	Vetor de deslocamentos nodais
a_s	Vetor de deslocamentos nodais do sistema em equilíbrio estático
a_c	Vetor de deslocamentos dos nós representativos
\tilde{b}	Matriz de coordenadas nodais
b	Vetor de coordenadas nodais
ξ	Vetor de coordenadas generalizadas
$\Omega^{[\cdot]}$	Domínio composto por uma célula
Φ_s	Domínio composto por sólido
Φ_f	Domínio composto por fluido
\mathbb{S}	Domínio de um corpo na configuração deformada
\mathbb{S}_0	Domínio de um corpo na configuração de referência
\mathbb{X}	Subdomínio qualquer de \mathbb{S}
\mathbb{X}_0	Subdomínio qualquer de \mathbb{S}_0
$V_{\mathbb{X}}$	Volume de \mathbb{X}
$A_{\mathbb{X}}$	Área da seção de \mathbb{X}
\mathbb{E}	Domínio em coordenadas generalizadas correspondente a um elemento isoparamétrico
V_e	Vértices de um elemento
V_p	Vértices de um polígono simples qualquer
A_p	Área de um polígono simples qualquer
m	Número de nós de um elemento
N_s	Número de elementos sólidos
N_f	Número de elementos fluidos
N_t	Número de elementos da malha
W	Trabalho
\dot{W}	Potência

\dot{W}_{def}	Potência de deformação
Ψ	Função densidade de energia de deformação
Π	Energia potencial do sistema
W_{int}	Trabalho referente a forças internas
W_{ext}	Trabalho referente a forças externas
W_s	Termo de W_{int} correspondente à energia de deformação estrutural
W_k	Termo de W_{int} correspondente à energia de deformação das molas
W_p	Termo de W_{ext} correspondente ao trabalho dos carregamentos hidrostáticos
W_f	Termo de W_{ext} correspondente ao trabalho das forças pontuais
ψ	Vetor resíduo
ψ_s	Componente estrutural do resíduo
ψ_k	Componente do resíduo relativo às molas
ψ_p	Componente do resíduo relativo ao carregamento hidrostático
ψ_f	Componente do resíduo relativo às cargas pontuais aplicadas
ψ_i	Parcela de ψ_f referente a cargas internas
ψ_o	Parcela de ψ_f referente a cargas externas
$\tilde{\psi}_s$	Matriz de resíduo estrutural
Y_ψ	Matriz cuja integral fornece o resíduo estrutural
Y_p	Matriz de polinômios que representam Y_ψ
Y_r	Matriz da diferença de Y_ψ e Y_p
K	Matriz tangente
K_s	Componente estrutural da matriz tangente
K_k	Componente da matriz tangente relativo às molas
K_p	Componente da matriz tangente relativo ao carregamento hidrostático
K_a	Componente da matriz tangente relativo ao carregamento externo aplicado na estrutura

K_b	Componente da matriz tangente relativo ao carregamento externo aplicado nos elementos
Y_k	Matriz cuja integral fornece a rigidez estrutural
n_g	Número de pontos da quadratura de Gauss
\bar{x}_i	i-ésimo ponto da quadratura de Gauss
\bar{w}_i	i-ésimo peso da quadratura de Gauss
n_r	Número de graus de liberdade restritos
\mathbb{G}	Conjunto dos graus de liberdade restritos
R_c	Matriz de restrição
ε_f	Critério de parada do método Newton-Raphson
W_e	Matriz que transforma vetores locais em vetores aumentados
P_f	Vetor de cargas pontuais
P_g	Vetor de cargas nos graus de liberdade do elemento
P_a	Vetor de cargas externas aplicadas na estrutura global
P_b	Vetor de cargas externas aplicadas nos elementos
M_k	Matriz de constantes de mola
M_g	Matriz de constantes de mola nos graus de liberdade do elemento
M_c	Matriz que relaciona deslocamentos da microestrutura com deslocamentos dos nós representativos
$f_c^{[.]}$	Carregamento equivalente de um elemento representativo
$K_c^{[.]}$	Componente da matriz tangente relativo ao carregamento externo de um elemento representativo
$\alpha^{[.]}$	Número de sensibilidade referente ao vetor $z^{[.]}$
α^x	Número de sensibilidade referente ao vetor x
α^y	Número de sensibilidade referente ao vetor y
r_{\max}	Raio do filtro de suavização
H_f	Matriz do filtro de suavização

γ_s	Função de interpolação da rigidez do microelemento
γ_p	Função de interpolação da pressão do microelemento
h	Função-objetivo
h_o	Trabalho útil
h_t	Transmitância mecânica
h_c	<i>Compliance</i> média
v_f	Fração volumétrica alvo
$z^{[.]}$	Vetor de microtopologia de uma célula
x	Primeiro vetor de macrotopologia
y	Segundo vetor de macrotopologia
γ_s^x	Primeira função de interpolação da rigidez do macroelemento
γ_s^y	Segunda função de interpolação da rigidez do macroelemento
γ_p^x	Primeira função de interpolação do carregamento do macroelemento
γ_p^y	Segunda função de interpolação do carregamento do macroelemento
W_{ks}	Energia de deformação das molas apenas estruturais
W_{kh}	Energia de deformação das molas-objetivo
W_t	Energia de deformação total
p_s	Expoente de penalização do modelo SIMP para o módulo de Young
p_p	Expoente de penalização do modelo SIMP para o valor de pressão
ϕ	Função de movimento de um corpo deformável
J	Determinante do gradiente de deformação
G	Matriz transposta do gradiente do campo de deslocamentos
F	Gradiente de deformação
R	Matriz de rotação
U	Matriz de estiramento
C	Tensor de deformações de Cauchy-Green à direita

$\{\lambda_C\}$	Conjunto dos possíveis autovalores de C
m_c	Cota superior de $\{\lambda_C\}$
$\lambda_c^{(\cdot)}$	Autovalor de C
\tilde{C}	Matriz C normalizada
X	Matriz complementar de \tilde{C}
E^g	Tensor de deformações de Green-Lagrange
E^i	Tensor de deformações infinitesimais
E^h	Tensor de deformações de Hencky
T^c	Tensor de tensões de Cauchy
T^g	Segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff
T^h	Tensor de tensões de Hencky
D^p	Tensor de propriedades do material
Q	Tensor de realocação
T	Tensor de tensões de Hencky reduzido para o caso bidimensional
E	Tensor de deformações de Hencky reduzido para o caso bidimensional
σ	Vetor de tensão
N^*	Funções de interpolação de um elemento finito qualquer
N	Funções de interpolação de um elemento finito isoparamétrico
J_s	Matriz de derivadas das coordenadas espaciais em relação às coordenadas generalizadas
J_u	Matriz de derivadas dos deslocamentos em relação às coordenadas generalizadas
B	Matriz de derivadas de N em relação às coordenadas generalizadas
P	Matriz que relaciona G com \tilde{a}
D	Tensor que relaciona G com a
H	Matriz que relaciona u com a

F_p	Matriz que relaciona as posições nodais deslocadas com a derivada da área de um elemento
I_L	Matriz antissimétrica componente de F_p à esquerda da diagonal
I_R	Matriz antissimétrica componente de F_p à direita da diagonal
O	Matriz nula
I	Matriz identidade
\cdot_e	Grandeza no sistema local de um microelemento e
\cdot_E	Grandeza no sistema local de um macroelemento E
\cdot_G	Grandeza no sistema global irrestrito
\cdot_A	Grandeza elementar aumentada para o sistema global irrestrito
\cdot_R	Grandeza no sistema global restrito
\cdot_μ	Grandeza da microescala
\cdot_μ	Grandeza da macroescala
δ_{ij}	Delta de Kronecker
δ_d	Delta de Dirac unidimensional
δ_D	Delta de Dirac tridimensional
$\Sigma \cdot$	Somatório
$\Pi \cdot$	Produtório
$\nabla \cdot$	Operador gradiente
$\frac{\partial \cdot}{\partial \cdot}$	Operador de diferenciação
$\int \cdot d \cdot$	Operador de integração
$\ \cdot \ $	Norma euclidiana
\wedge	Produto vetorial
\cdot	Produto de tensores
$:$	Produto duplo de tensores
\times	Produto cartesiano de conjuntos

\in	Relação de pertinência a um conjunto
\subset	Relação de continência a um conjunto
\mathbb{N}	Conjunto dos Números Naturais
\mathbb{N}^*	Conjunto dos Números Naturais - $\{0\}$
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{R}_+^*	Conjunto dos números reais positivos
\mathcal{C}^n	Classe de funções com n-ésima derivada contínua

SUMÁRIO

1	Introdução	14
1.1	Contexto	14
1.2	Motivação	15
1.3	Objetivos	16
1.4	Revisão Bibliográfica	17
2	Fluidoatuadores Celulares	21
2.1	Descrição	21
2.2	Tensores e Notação Indicial	24
2.3	Equações Governantes	26
2.3.1	Cinemática	26
2.3.2	Tensões	33
2.3.3	Equilíbrio Estático	36
2.4	Simulação Numérica	41
2.4.1	Formulação do Microelemento Estrutural	41
2.4.2	Resolução da Microescala	54
2.4.3	Modelo Multiescala	66
3	Otimização Topológica	77
3.1	Problema Microescala	77
3.2	Problema Macroescala	85
3.3	Problema Multiescala	90
3.4	Concepção do Fluidoatuador Celular	94
3.5	Implementação Computacional	104
4	Resultados e Discussão	107
4.1	Validação do Programa	107
4.1.1	Análise Estrutural	107
4.1.2	Carregamento Hidrostático	110
4.1.3	Sensibilidades	113
4.1.4	Problemas de Referência	123
4.1.5	Modelo Representativo	126
4.2	Problemas Abordados	134
4.2.1	Atuadores Unicelulares	134
4.2.2	Estruturas Reativas	141
4.2.3	Constritores Radiais	150
4.2.4	Atuadores Articulados	158
5	Conclusão	164

Referências 166

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contexto

Em conjunto com constantes avanços tecnológicos na área computacional, houve um grande progresso nas teorias e aplicações de métodos numéricos nas últimas décadas. Através de métodos para solucionar equações diferenciais, como o Método de Elementos Finitos (MEF), viabiliza-se a simulação de modelos cada vez mais complexos, nos quais incluem-se efeitos não-lineares, dinâmicos, multifísicos. Potencializadas pela sofisticação das simulações, as técnicas de otimização desenvolveram-se em abrangência e robustez, tornando-se ferramentas valiosas na abordagem de uma variedade de problemas de engenharia.

Definida uma função de performance (ou uma função de custo), denominada função-objetivo, e parâmetros que podem ser variados no sistema, denominados variáveis de projeto, os métodos de otimização buscam obter valores desses parâmetros que maximizam a performance (ou minimizam o custo). Há uma vasta gama de métodos e diversas aplicações para cada um deles, contudo, neste trabalho, interessa-se especificamente pela otimização topológica como ferramenta na concepção de fluidoatuadores celulares.

Dado um domínio de projeto e uma quantidade de tipos de material, os métodos de otimização topológica determinam qual material deve preencher cada ponto do domínio para maximizar a função-objetivo estabelecida. Dessa forma, partindo de uma topologia inicial, o programa de otimização é utilizado para determinar iterativamente topologias eficazes para uma determinada estrutura ou mecanismo, usando apenas de um conjunto de informações fundamentais: dimensões máximas, propriedades dos materiais, volume designado para cada material, restrições mecânicas, função-objetivo.

Algumas peculiaridades estão presentes no problema abordado. Espera-se um regime de grandes deslocamentos e deformações, o que inclui não-linearidades geométricas no sistema, tanto na relação entre campos de deslocamento e de deformação quanto devido a variações das interfaces presentes no sistema, que alteram as direções e intensidades dos carregamentos provenientes da interação entre partes sólidas e fluidas. Esses carregamentos também dependem das variáveis de projeto, já que as interfaces se alteram com a topologia. Além disso, o atuador é definido como um arranjo de células, assim, realizam-se dois processos de otimização interdependentes: na escala menor, denominada microescala, determina-se o aspecto de cada célula; enquanto na escala maior, denominada macroescala, determina-se a distribuição dessas células no domínio.

1.2 Motivação

Na abordagem de problemas pouco intuitivos e de elevada complexidade, a natureza vem sendo uma fonte frutífera de inspirações para o desenvolvimento de novas técnicas e modelos. O processo evolutivo dos seres vivos inspirou a criação de *algoritmos genéticos* (KUMAR *et al.*, 2010); a forma como insetos sociais se comportam inspira o desenvolvimento de algoritmos de *inteligência de enxames* (FISTER JR *et al.*, 2013); estruturas leves e com combinações eficazes de propriedades mecânicas, como ossos e conchas, inspiram a produção de novos tipos de material (WEGST *et al.*, 2015).

Mecanismos baseados em plantas násticas mostraram potencial em realizar atuações reversíveis e de curso elevado através de entradas simples, como controle de fluxo ou de pressão do fluido (FREEMAN; WEILAND, 2009). Plantas desse tipo são capazes de realizar rápidos movimentos após receberem um estímulo externo. A Figura 1.1 ilustra o mecanismo da *Dionaea muscipula*, popularmente conhecida como Vênus papa-moscas, o qual ativa-se quando uma presa estimula os pêlos sensoriais que ocupam o interior da armadilha. O gatilho desencadeia processos bioquímicos que transportam água de forma a tornar túrgidas as células da epiderme externa, mantendo flácidas as da epiderme interna. A expansão desigual das camadas provoca tensões mecânicas na estrutura resultando no fechamento das folhas, que aprisionam a presa (MARKIN *et al.*, 2008).

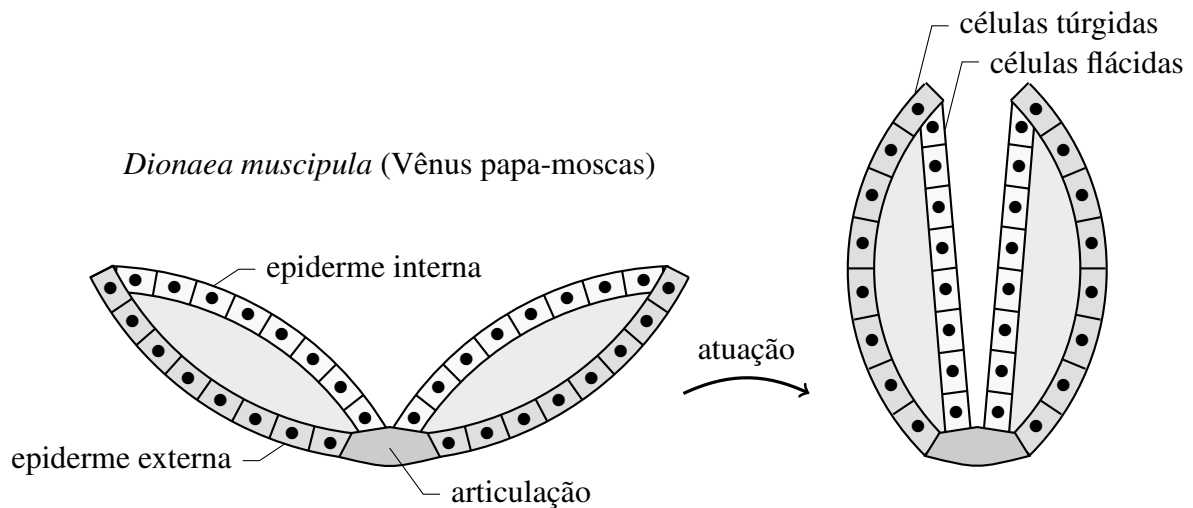


Figura 1.1 – Movimento Nástico

Na área médica, há propostas de atuadores pneumáticos desenvolvidos como dispositivos de assistência para movimentar articulações debilitadas (AGARWAL *et al.*, 2016). Na aeronáutica, projetam-se asas adaptativas como estruturas de células pressurizadas capazes de alterar suas formas de acordo com a necessidade (PAGITZ *et al.*, 2012). Em abordagens mais amplas, desenvolvem-se modelos de representação e simulação para determinados tipos de atuadores, assim como implementam-se métodos de otimização buscando estabelecer ferramentas sistemáticas para o projeto de mecanismos eficientes (LV *et al.*, 2014).

Alinhando-se a esse último tipo de abordagem, propôs-se explorar a seguinte classe de fluídoatuadores bioinspirados: estruturas celulares bidimensionais, cujas células são compostas por um único material sólido e por cavidades repletas de fluido de pressão controlável. Desenvolvendo seu modelo de representação, sua simulação numérica e um programa de otimização topológica a ser usado como instrumento na concepção de novos mecanismos.

1.3 Objetivos

A meta deste trabalho é a elaboração de um programa de otimização capaz de fornecer topologias funcionais para fluídoatuadores celulares, de acordo com especificações dadas pelo usuário. A topologia do mecanismo é dada tanto pela microtopologia de cada tipo de célula quanto pela macrotopologia do atuador. Para cada célula, a microtopologia define quais partes do microdomínio são sólidas e quais partes são fluidas. Por sua vez, a macrotopologia define qual célula deve preencher parte do macrodomínio.

Primeiramente, deve-se estabelecer como são os mecanismos considerados, que leis físicas regem o problema, que hipóteses foram adotadas e quais são as equações que descrevem o fenômeno. Então, pode-se desenvolver a formulação necessária para solucionar numericamente essas equações, o que permite simular o comportamento do sistema, para isso, utilizou-se o MEF.

Para viabilizar a análise de atuadores compostos por uma grande quantidade de células, é preciso utilizar um modelo representativo para simbolizar as células na macroescala como um elemento simplificado. Assim, o programa de simulação pode ser implementado e, dadas as topologias das células e do atuador, pode-se avaliar como o mecanismo atua quando o fluido das células é pressurizado.

Com a simulação devidamente descrita, o problema de otimização pode ser abordado. Devem-se determinar funções-objetivo que representem algum tipo de performance dos atuadores, designar quais são as variáveis de projeto e definir as restrições do problema. Para implementar o método de otimização topológica selecionado, o *Bidirectional Evolutionary Structural Optimization* (BESO) (YANG *et al.*, 1999), é necessário realizar uma análise de sensibilidades, a qual serve de critério de decisão para atualizar as topologias. Deve-se realizar uma análise para cada escala: uma para otimizar as microtopologias e outra para otimizar a macrotopologia. Enfim, pode-se implementar o programa de otimização topológica multiescala e obter estruturas otimizadas para diferentes especificações, de modo a comprovar o potencial da ferramenta.

Em resumo, têm-se como objetivos:

- propor e descrever um modelo físico para os atuadores;
- desenvolver um modelo numérico de simulação;

- propor e descrever um modelo representativo para as células;
- implementar e validar o programa de simulação;
- propor funções-objetivo e detalhar os problemas de otimização abordados;
- desenvolver a análise de sensibilidades para as microtopologias;
- desenvolver a análise de sensibilidades para as macrotopologias;
- implementar e validar o programa de otimização topológica multiescala;
- obter fluidoatuadores celulares para diferentes especificações.

1.4 Revisão Bibliográfica

Desde trabalhos precursores como o de Bendsøe e Kikuchi (1988), que aborda a otimização topológica através de um método de homogeneização, os métodos computacionais de otimização desenvolveram-se em diferentes direções.

Em métodos de densidade, define-se uma função de interpolação para descrever as propriedades do material quando este assume uma densidade intermediária, isto é, quando a variável de projeto assume um valor entre 0 e 1, onde 0 representa a ausência e 1 representa a presença do material estrutural em cada elemento do domínio discretizado. A escolha dessa função afeta tanto a estabilidade do problema quanto a viabilidade das soluções. No caso, uma solução viável é aquela apenas com densidades próximas dos extremos 0 ou 1, ou seja, é claro onde deve haver material sólido e onde deve haver vazio. Este tipo de método torna o problema diferenciável, com isso a otimização pode ser resolvida utilizando técnicas bem estabelecidas baseadas no gradiente da função-objetivo como o *Method of Moving Asymptotes* (MMA) (SVANBERG, 1987).

No modelo *Solid Isotropic Material with Penalization* (SIMP) (BENDSØE, 1989), a relação entre as propriedades do material e a densidade é dada por uma lei de potência, cujo expoente pode ser ajustado para obter resultados adequados. A interpolação *Rational Approximation of Material Properties* (RAMP) (STOLPE; SVANBERG, 2001), propõe uma função racional para descrever o comportamento do material, no intuito de melhorar o problema em termos de convexidade. Além desses, há diversos outros modelos, cada um com vantagens e limitações específicas (BENDSØE; SIGMUND, 1999).

Os métodos de *Level Set* (WANG *et al.*, 2003) baseiam-se na definição dos contornos estruturais como curvas ou superfícies de nível. A otimização se dá pela manipulação desses contornos através de transformações cinemáticas da "função *level set*". Ao contrário do que ocorre nos métodos de densidade, aqui as interfaces entre domínios sólidos e vazios estão definidas de forma clara, o que justifica esse tipo de abordagem em problemas nos quais

há condições especiais nas fronteiras, por exemplo, no caso de carregamentos dependentes dos contornos (XIA *et al.*, 2015) ou quando se consideram variações estocásticas neles (GUO *et al.*, 2013).

Métodos de derivadas topológicas (NOVOTNY *et al.*, 2003) para otimização topológica de estruturas começaram a surgir com Eschenauer *et al.* (1994), que nomeou a técnica de *Bubble Method*. Utilizando operações de limite, esse tipo de método busca obter a sensibilidade da função-objetivo à criação de pequenos furos em cada ponto do domínio, para então usá-la como critério para a atualização da topologia. Em busca de métodos mais robustos e eficazes, em artigos como os de Burger *et al.* (2004) e Norato *et al.* (2007) propõem-se combinações e aprimoramentos dessas técnicas, com a utilização de derivadas topológicas em conjunto com métodos de *Level Set* no processo de otimização.

Usando modelos análogos aos dos métodos de densidade, métodos discretos (no sentido de as densidades poderem assumir apenas uma quantidade predeterminada de valores) são propostos para eliminar a possibilidade de topologias inviáveis. Entre eles, destaca-se o método *Evolutionary Structural Optimization* (ESO) (XIE; STEVEN, 1993) e sua versão mais geral, o *Bidirectional ESO*, ou BESO. No primeiro, define-se um vetor de sensibilidades, usado como critério de comparação para eliminar da estrutura os elementos sólidos menos relevantes, o processo segue iterativamente até que se atinja o volume final definido; no segundo, além de remover elementos sólidos, pode-se adicioná-los novamente à estrutura. Essa abordagem assume, ao menos implicitamente, hipóteses fortes sobre o comportamento da função-objetivo e é classificada como heurística ou intuitiva (ZHOU; ROZVANY, 2001). Tal caráter torna esse tipo de método menos robusto do que os métodos contínuos, descritos com maior rigor matemático. Contudo, após alguns avanços, como a utilização de um modelo SIMP e de um filtro suavizador na análise de sensibilidades, o BESO estabeleceu-se como um método confiável capaz de otimizar estruturas com elevada eficiência computacional (HUANG; XIE, 2010).

As pesquisas em otimização topológica têm se dividido em algumas direções principais, favorecendo as abordagens de densidade SIMP, *Level Set* e BESO (SIGMUND; MAUTE, 2013). A escolha deste último método para o desenvolvimento do projeto deve-se a sua simplicidade, em termos de formulação e implementação computacional, juntamente com a garantia de fronteiras bem definidas, característica especialmente relevante neste trabalho, uma vez que são considerados carregamentos que dependem da forma das cavidades de fluido.

A popularização e aprimoramentos das técnicas de otimização abriram espaço para que problemas mais elaborados fossem tratados. Mais do que simplesmente minimizar a *compliance* média de uma estrutura sob restrições de volume, abordam-se questões necessárias ao projeto prático. Consideram-se restrições sobre as tensões do sistema e incertezas nos carregamentos (SILVA *et al.*, 2018), ou ainda, levam-se em conta condições impostas pelo processo de produção, como limitar o ângulo de *overhang* em uma peça a ser produzida por manufatura aditiva (GAYNOR; GUEST, 2016). Outra linha de sofisticação dos problemas de otimização é a

inclusão de mecanismos de falha, como flambagem (THOMSEN *et al.*, 2018) e fratura (KANG *et al.*, 2017), que visa garantir resultados mais confiáveis, em termos de as cargas críticas reais serem próximas das obtidas via simulação numérica.

Métodos de homogeneização são usados na análise de sistemas multiescala com microestruturas periódicas. Nesse tipo de problema otimizam-se as topologias da microescala para a concepção de metamateriais, que são materiais artificiais projetados para ter propriedades incomuns (WANG *et al.*, 2017), por exemplo, uma expansão térmica muito elevada, negativa (retração térmica), ou próxima de zero (SIGMUND; TORQUATO, 1997). Tanto no projeto de metamateriais quanto no de estruturas e mecanismos, materiais multifásicos são utilizados para obter soluções interessantes que combinam de forma eficaz as propriedades de cada componente: materiais rígidos são usados em conjunto com materiais flexíveis para o projeto de metamateriais com coeficiente de Poisson negativo (VOGIATZIS *et al.*, 2017); e na concepção de estruturas com valores de tensão minimizados (GUO *et al.*, 2014); no *design* de atuadores piezoelétricos, combinam-se materiais piezoelétricos e materiais puramente elásticos (LUO *et al.*, 2010).

Para lidar com esse tipo de problema multimaterial, é necessário definir um esquema de interpolação apropriado no qual os elementos possuem uma variável para cada material. No *Recursive Multiphase Materials Interpolation* (RMMI), define-se uma função de interpolação monovariável e o esquema multimaterial é descrito como uma aplicação recursiva dessa função, adicionando uma nova variável para cada material incluído no sistema; no *Uniform Multiphase Materials Interpolation* (UMMI), as propriedades do elemento são dadas por uma média ponderada das propriedades dos materiais (GAO; ZHANG, 2011).

Neste trabalho, não se assume um arranjo periódico de células, tampouco uma diferença substancial entre as dimensões da macro e microescala, portanto, ao invés de utilizar métodos de homogeneização, define-se um elemento equivalente, no qual cada célula é descrita como um único macroelemento representativo, abordagem análoga à de Lv *et al.* (2014). Como cada macroelemento pode corresponder a diferentes células, torna-se necessário adotar um modelo multimaterial, optou-se pelo RMMI.

Quando se trabalha com estruturas ou mecanismos flexíveis, as linearizações válidas para regimes de pequenos deslocamentos e deformações deixam de ser razoáveis e o problema torna-se geometricamente não-linear, o que prejudica a estabilidade do sistema e aumenta o custo computacional para solucioná-lo. Abordar problemas mais gerais, sem a hipótese de linearidade, permite a obtenção de resultados mais realistas e de melhor performance, como estruturas mais rígidas (BRUNS; TORTORELLI, 2001) e mecanismos com menores tensões mecânicas (LEON *et al.*, 2015). Nesse tipo de problema, os carregamentos podem variar conforme o corpo se deforma, como é o caso de carregamentos hidrostáticos (LEE; LEE, 2016). Assim como em Picelli *et al.* (2015), nos mecanismos propostos, além da dependência com o campo de deslocamentos, as cargas hidrostáticas dependem da topologia, o que dificulta tanto

as formulações quanto a resolução numérica do problema de otimização.

No contexto de concepção de mecanismos por métodos de otimização, há diversos modelos desenvolvidos para estruturas celulares atuadas por fluido. Em Lv *et al.* (2016), cada célula é definida por uma matriz sólida com uma única cavidade elíptica de fluido incompressível. Estas células são representadas por um elemento equivalente na macroescala, a atuação se dá pela imposição de uma variação no volume da cavidade, trabalha-se com um único tipo de célula por vez e otimiza-se apenas a macrotopologia. Em Pagitz e Leine (2017), a estrutura é definida por fileiras de células repletas de fluido, molas lineares e rotacionais são usadas para descrever o comportamento das interfaces entre células (paredes e articulações), a pressão de cada fileira pode ser controlada para acionar uma mesma estrutura de diferentes maneiras, a forma das células é otimizada para que o sistema acionado assuma determinada configuração-alvo. A proposta apresentada é mais próxima à primeira; ainda assim, entre outras coisas, difere na forma de acionamento e permite microestruturas mais gerais.

Assim, entende-se como contribuição à área a descrição dessa nova classe de atuadores, de elevada generalidade, e a implementação de um programa de otimização correspondente, capaz de gerar topologias eficazes. De forma mais ampla, no âmbito da otimização topológica, agrega-se conteúdo aos campos de análise geometricamente não-linear, de mecanismos flexíveis, de problemas multimaterial, de estruturas multiescala. Enfim, este trabalho estabelece uma base de referência para o avanço e desenvolvimento desta e de novas abordagens.

2 FLUIDOATUADORES CELULARES

2.1 Descrição

Consideram-se fluidoatuadores descritos por estruturas contínuas e homogêneas, compostas por material sólido com cavidades internas repletas de fluido. A atuação se dá pela imposição de uma pressão sobre o fluido. A estrutura pressurizada deforma-se realizando a função mecânica atribuída ao atuador. Esta é representada no modelo pela inclusão de molas-objetivo, cujas orientações e constantes elásticas indicam como se espera que o atuador interaja com o sistema sobre o qual atua. Os atuadores são modelados como estruturas celulares, com duas escalas distintas: uma microescala, na qual cada tipo de célula é descrito; e uma macroescala, na qual se define o arranjo de células que forma o fluidoatuador.

Todo carregamento é aplicado de forma quase-estática, a estrutura mantém-se em regime elástico, não há efeitos térmicos nem forças de campo (gravitacional, elétrico ou magnético), todo trabalho aplicado pelas forças externas é transformado em energia de deformação. Em outras palavras, tem-se um problema puramente mecânico, estático e sem irreversibilidades. Nessas condições, não é preciso modelar o fluido, ele é representado simplesmente por um carregamento hidrostático nas interfaces das cavidades. Para valores elevados de pressão, têm-se grandes campos de deslocamentos e, com isso, surgem não-linearidades geométricas no problema. O tensor de deformações do material não pode ser considerado proporcional aos deslocamentos e o carregamento hidrostático altera-se em módulo e direção conforme a estrutura é deformada.

Avaliam-se estruturas em estado plano, cada atuador é representado pela seção de um prisma reto. Tem-se um estado plano de tensões (EPT) para prismas achatados e um estado plano de deformações (EPD) para prismas longos. Considera-se que todas as cavidades se conectam nas extremidades do prisma, assim, como desprezam-se efeitos gravitacionais e dinâmicos, todos os domínios de fluido possuem o mesmo valor de pressão, entrada do sistema. Para prismas achatados, pode-se imaginar estruturas submersas no fluido pressurizado, neste caso, desconsideram-se os efeitos do carregamento ortogonal à seção. Para prismas longos, pode-se supor que a extremidade está fixada a um reservatório, considera-se que os prismas são suficientemente longos para os efeitos de borda serem desprezíveis.

Evitam-se soluções triviais, como uma célula de núcleo sólido e regiões de fluido em contato direto com as molas-objetivo, definindo uma parede celular de espessura mínima, ou seja, cerca-se o domínio de projeto da microescala por uma região sólida que não pode ser alterada. Entende-se que a parte sólida do mecanismo deve possuir função estrutural, logo, uma topologia com ilhas de sólido configura um resultado degenerado. A imposição de uma parede sólida elimina a possibilidade dessas degenerações nas fronteiras entre células e reduz

instabilidades computacionais na etapa de análise. Destaca-se que um único material sólido é usado nas microestruturas, ou seja, o material da parede celular é o mesmo sólido que constitui as células.

Para simplificar as formulações, utilizam-se apenas células quadradas e simétricas tanto em relação ao eixo horizontal quanto ao vertical. Logo, a macrotopologia é sempre descrita por geometrias quadriculadas, ou seja, toda linha curva dividindo domínios é transformada em uma divisão serrilhada. Do mesmo modo, as microtopologias, quando discretizadas em elementos finitos, são compostas por elementos quadrados, assim, as interfaces entre sólido e fluido também são serrilhadas.

Observa-se que essa característica das discretizações pode causar imprecisões caso análises de tensões sejam realizadas nas fronteiras entre domínios. Num primeiro momento, aplicava-se um filtro suavizador nos nós das interfaces das microestruturas, transformando os elementos adjacentes em quadriláteros gerais e as interfaces em polígonos suavizados (com ângulos internos mais próximos de 180°), entretanto, visto que avaliar limites de tensão não está no escopo do trabalho e que a evolução das topologias fora pouco influenciada pela presença desse filtro, sua utilização mostrou-se injustificada. Portanto, para se evitar acréscimos no custo computacional, pela necessidade de armazenar e acompanhar a evolução de todas as interfaces durante a otimização, e instabilidades, já que o filtro implementado causava degenerações da malha em alguns casos mais problemáticos, o desenvolvimento desta ferramenta foi descontinuado.

A otimização de sistemas com uma grande quantidade de células é viabilizada pela definição de um elemento representativo, que substitui toda a malha da microestrutura por um único elemento simplificado, com propriedades homogêneas e cargas nodais dependentes do campo de deslocamento. Dada a função-objetivo a ser maximizada, o processo de otimização das microestruturas define, para uma relação desejada entre volumes de sólido e fluido, a quantidade e a forma de cavidades de fluido no interior das paredes celulares; por sua vez, a otimização da macroestrutura define, dada uma relação desejada entre volumes das células componentes, a maneira como as células são distribuídas pelo domínio.

A Figura 2.1 ilustra três células: à esquerda, têm-se suas topologias, o domínio sólido Φ_s , de módulo de Young E_y^0 , é representado em branco e o domínio fluido Φ_f , de pressão p_c , em cinza, explicitam-se as linhas de simetria e os limites da parede celular, de espessura w_c ; ao centro, têm-se versões discretizadas dessas topologias, em malhas de 400 elementos; analisando o sistema discretizado, podem-se definir os elementos representativos, à direita, obtendo as propriedades $E_y^{[.]}$ e carregamentos $f_c^{[.]}$ para cada célula.

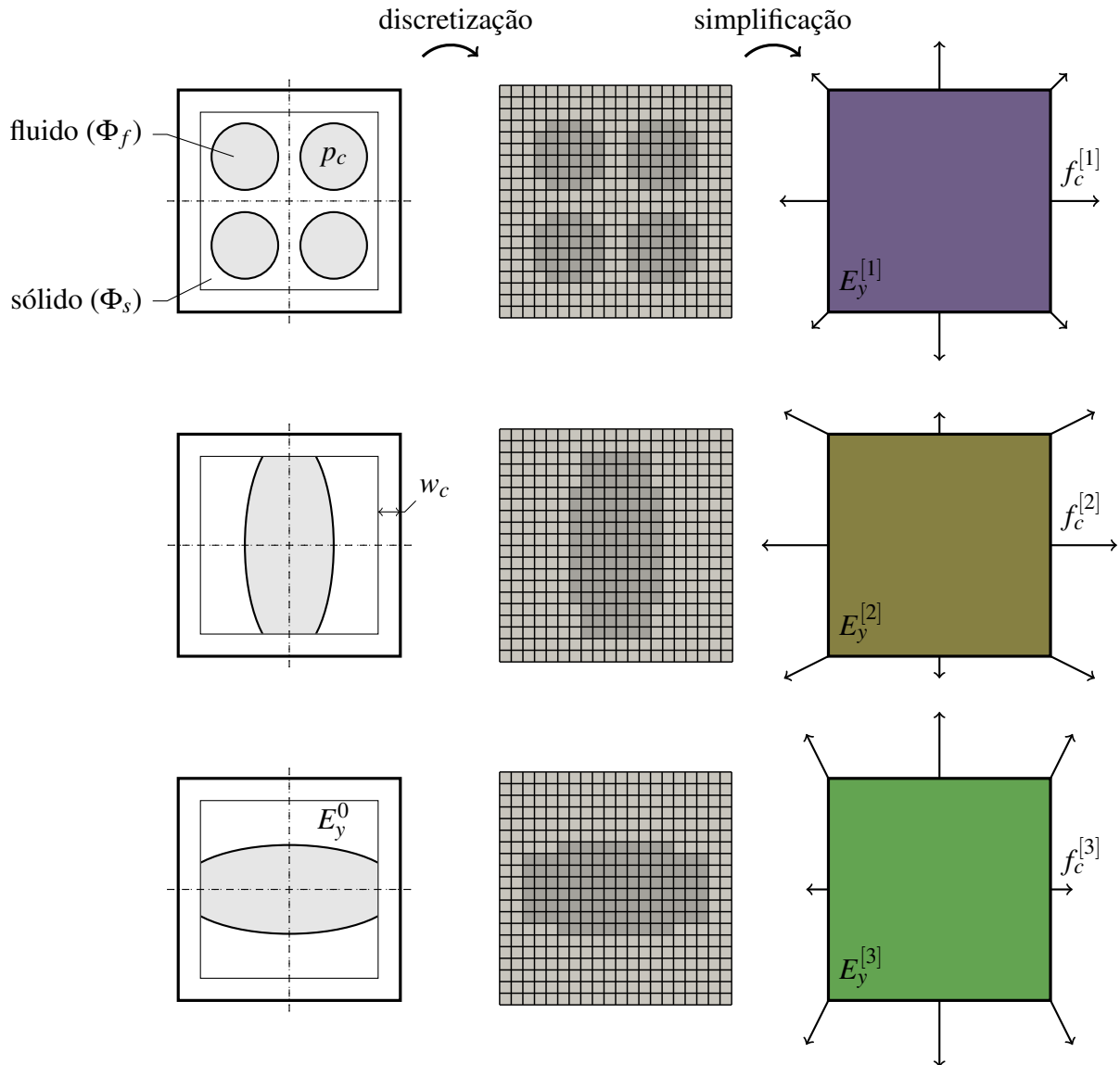


Figura 2.1 – Microestruturas

Um exemplo de atuador é apresentado na Figura 2.2: à esquerda, tem-se sua topologia, na qual se distinguem três domínios, $\Omega^{[1]}$, $\Omega^{[2]}$ e $\Omega^{[3]}$, correspondentes a regiões constituídas pelas células [1], [2] e [3], o sistema possui duas restrições, \tilde{R}_1 e \tilde{R}_2 , e três molas de constantes elásticas k_1 , k_2 e k_3 , que indicam como se espera que o mecanismo atue; na parte superior direita, tem-se, para um tamanho de célula especificado, a versão discretizada em 76800 elementos; a versão discretizada em elementos representativos é apresentada na parte inferior direita, cada célula corresponde a um único elemento, o que reduz o número de elementos da malha para 192.

Assim, para avaliar o comportamento de um dado atuador, deve-se primeiro definir de que maneira o material estrutural das células se deforma quando pressuriza-se o fluido em suas cavidades. Então, é preciso descrever como discretizar o domínio e de que maneira as grandezas cinemáticas se comportam no problema discretizado. Em seguida, é necessário precisar o modelo adotado para a etapa de simplificação, na qual cada célula passa a ser representada por

apenas um elemento. Enfim, pode-se simular o comportamento do atuador com o macrodomínio discretizado nesses elementos representativos. Após isso, pode-se definir uma função-objetivo a ser maximizada e abordar o problema de otimização em cada uma das escalas.

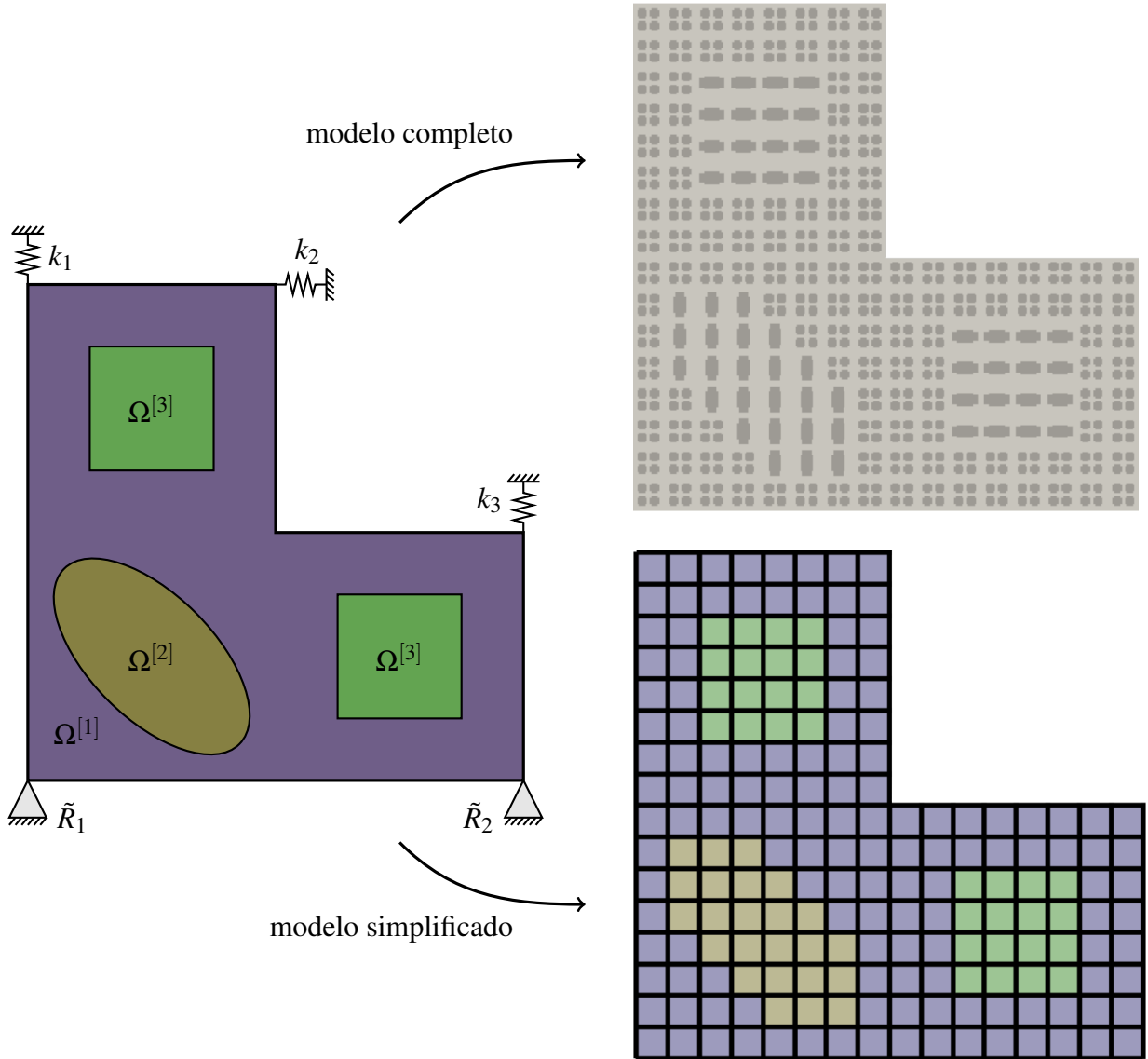


Figura 2.2 – Macroestrutura

2.2 Tensores e Notação Indicial

Antes de começar o desenvolvimento das formulações é preciso definir algumas notações adotadas para as operações com tensores.

Um tensor é uma entidade matemática que generaliza os conceitos de escalares, vetores e matrizes; pode ser entendido como um conjunto de valores ordenados numa quantidade definida de dimensões. Um tensor de dimensões $(n_1, n_2, \dots, n_m) \in \{\mathbb{N}^*\}^m$ possui ordem m e $\prod_{k=1}^m n_k$ termos independentes; considerando números reais, o conjunto desses tensores é biuní-

vuco com o conjunto $\mathbb{R}^{(n_1 n_2 \dots n_m)}$. Assim, matrizes correspondem a tensores de ordem 2; vetores correspondem a tensores de ordem 1; e escalares são considerados tensores de ordem 0.

Como as representações de tensores de alta ordem (maior que 2) são demasiado extensas, torna-se conveniente utilizar a notação indicial e suas convenções (CHEN; SALEEB, 2013) para descrever as operações tensoriais.

Nessa notação, um tensor é representado por seu termo geral e assumem-se conhecidas suas dimensões. Por exemplo, um tensor T^α de ordem 3 e dimensões (4, 2, 2), apresentado abaixo como quatro matrizes de dimensões (2, 2), é representado simplesmente por T_{ijk}^α , onde i , j e k são chamados índices livres.

$$T^\alpha = \left[\begin{array}{cc|cc} T_{111}^\alpha & T_{112}^\alpha & T_{211}^\alpha & T_{212}^\alpha \\ T_{121}^\alpha & T_{122}^\alpha & T_{221}^\alpha & T_{222}^\alpha \\ \hline T_{311}^\alpha & T_{312}^\alpha & T_{411}^\alpha & T_{412}^\alpha \\ T_{321}^\alpha & T_{322}^\alpha & T_{421}^\alpha & T_{422}^\alpha \end{array} \right] = \left\{ T_{ijk}^\alpha, \left| \begin{array}{l} i \in \{1, 2, 3, 4\} \\ j \in \{1, 2\} \\ k \in \{1, 2\} \end{array} \right. \right\} = T_{ijk}^\alpha$$

Aqui, um índice duplicado num mesmo termo é chamado de índice ligado; este indica que um somatório sobre tal índice está omitido na expressão. Por exemplo, um vetor v^β definido como o produto matricial de uma matriz M^α de dimensões (n, n) por um vetor v^α de dimensão (n) pode ser escrito como $M_{ij}^\alpha v_j^\alpha$, onde i é o índice livre do vetor resultante e j é o índice ligado que indica o somatório da operação, conforme apresentado abaixo.

$$v^\beta = M^\alpha v^\alpha \Leftrightarrow v_i^\beta = (M^\alpha v^\alpha)_i = \sum_{j=1}^n M_{ij}^\alpha v_j^\alpha = M_{ij}^\alpha v_j^\alpha$$

Os índices ligados podem ser nomeados e renomeados arbitrariamente, desde que os pares sejam mantidos e que eles não tenham o mesmo nome de nenhum índice livre.

Para simplificar a escrita de algumas expressões, introduz-se aqui uma notação tensorial. Nela, utilizam-se três operações (não-comutativas): diferenciação ($\frac{\partial}{\partial}$), produto (\cdot) e produto duplo ($:$). Sejam os tensores T^α de ordem n e T^β de ordem m . A diferenciação de T^α por T^β produz um tensor de ordem $n + m$ das derivadas efetuadas termo a termo. O produto de T^α por T^β produz um tensor de ordem $n + m - 2$, os índices livres são mantidos, exceto pelo último índice de T^α e o primeiro de T^β , que são igualados (há portanto um somatório sobre esse índice ligado). O produto duplo de T^α por T^β produz um tensor de ordem $n + m - 4$, os índices livres são mantidos, exceto pelos dois últimos índices de T^α e os dois primeiros de T^β , que são igualados.

Abaixo, essas três operações são exemplificadas com tensores T^α e T^β de ordem 3.

$$\left| \begin{array}{l} T^\gamma = \frac{\partial T^\alpha}{\partial T^\beta} \Leftrightarrow T_{ijkabc}^\gamma = \frac{\partial T_{ijk}^\alpha}{\partial T_{abc}^\beta} \\ T^\gamma = T^\alpha \cdot T^\beta \Leftrightarrow T_{ijbc}^\gamma = T_{ijx}^\alpha T_{xbc}^\beta \\ T^\gamma = T^\alpha : T^\beta \Leftrightarrow T_{ic}^\gamma = T_{ixy}^\alpha T_{xyc}^\beta \end{array} \right.$$

Destaca-se que não se pode efetuar produto com tensores de ordem 0 e que o produto duplo só pode ser realizado entre tensores de ordens superiores ou iguais a 2.

Na sequência, as notações matricial, tensorial e indicial são alternadas conforme a conveniência. Os resultados finais são apresentados sempre que possível em notação matricial, para facilitar a implementação do algoritmo; nas deduções, reveza-se o uso das notações tensorial e indicial, a primeira é mais compacta e, em alguns casos, representa operações computacionais, como realocar uma matriz em um vetor e vice-versa; a segunda permite maior praticidade para efetuar diferenciações, necessárias para o método numérico de solução dos sistemas matriciais e para a análise de sensibilidades usada no processo de otimização.

Abaixo, tem-se o exemplo de uma mesma expressão apresentada nas três notações; a^α é um tensor de ordem 0, v^α um tensor de ordem 1 e dimensão (n) , M^α é um tensor de ordem 2 e dimensões (n, n) :

$$\begin{array}{ccccccc} a^\alpha & = & v^{\alpha T} M^\alpha v^\alpha & = & v^\alpha \cdot M^\alpha \cdot v^\alpha & = & v_i^\alpha M_{ij}^\alpha v_j^\alpha \\ & & \text{(matricial)} & & \text{(tensorial)} & & \text{(indicial)} \end{array}$$

2.3 Equações Governantes

2.3.1 Cinemática

Aborda-se um problema de Mecânica do Contínuo no qual as grandezas que participam do fenômeno são apenas o campo de deslocamentos, incógnita, e as propriedades mecânicas do material, dados assumidos conhecidos. Na Figura 2.3 ilustra-se cada etapa para a formulação do problema estrutural estático, que consiste em obter o campo de deslocamentos dado o carregamento externo aplicado.

A partir do campo de deslocamentos, utilizando relações cinemáticas, pode-se definir uma medida de deformação, representada por um campo tensorial. As propriedades mecânicas do material, em conjunto com uma lei constitutiva, descrevem a relação entre o campo de deformação e o campo de tensão. Utilizando o Teorema de Cauchy (apresentado na subseção 2.3.2), estabelece-se uma relação entre o campo de tensão e os esforços internos atuantes no corpo. Por fim, através de princípios físicos, formula-se a equação de balanço, na qual os esforços internos e carregamentos externos se equilibram. Combinando todas essas etapas, contrói-se a relação desejada, entre carregamento externo e campo de deslocamentos. Então, o problema torna-se puramente matemático.

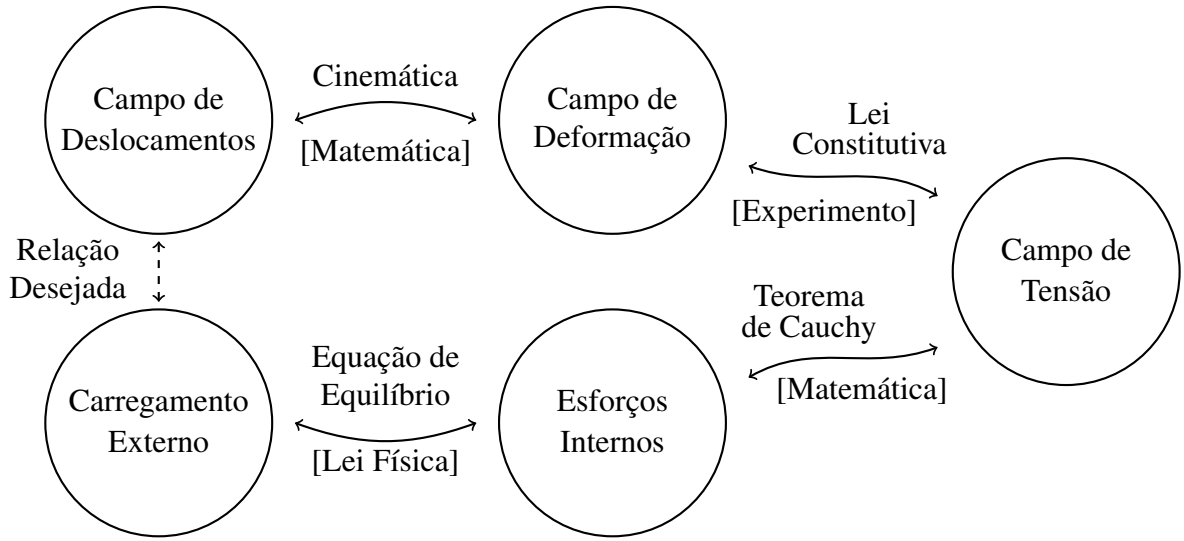


Figura 2.3 – Formulação do Problema Estrutural Estático

Para abordar o problema estrutural estático, começa-se descrevendo matematicamente o corpo físico e seu movimento. Considera-se um corpo deformável como um meio contínuo, limitado, conexo e de contorno suave. Ele possui uma configuração de referência, a qual corresponde a um domínio $\mathbb{S}_0 \subset \mathbb{R}^3$ que descreve o corpo em repouso, sem nenhum esforço interno ou externo.

Para cada instante de tempo $t \in \mathbb{R}$, define-se uma função de movimento φ_t que faz o mapeamento entre os pontos da configuração de referência, representados por vetores espaciais $s \in \mathbb{S}_0$, e os pontos da configuração deformada do corpo. Para o caso estático, a variável temporal não é pertinente e considera-se uma única função de movimento φ que leva o corpo a seu estado final. O corpo deformado é descrito por um domínio $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^3$ e seus pontos por vetores espaciais $r \in \mathbb{S}$. Assim:

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{S}_0 &\rightarrow \mathbb{S} \\ r &= \varphi(s)\end{aligned}\tag{2.1}$$

É comum denotar o gradiente de φ e seu determinante como F e J respectivamente; F é chamado de gradiente de deformação:

$$\begin{aligned}F(s) &= \nabla \varphi(s) = \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s) \\ J(s) &= \det(F(s))\end{aligned}\tag{2.2}$$

Algumas condições de compatibilidade devem ser cumpridas para que a função φ represente um movimento fisicamente aceitável. Em todos os pontos do aberto $\bar{\mathbb{S}}_0 = \{\mathbb{S}_0 - \partial\mathbb{S}_0\}$ (elementos de \mathbb{S}_0 que não pertencem ao contorno $\partial\mathbb{S}_0$), φ deve ser diferenciável e injetiva; além disso, o determinante de seu gradiente deve ser estritamente positivo, ou seja, φ deve ser tal que $J > 0$ (por consequência, F deve ser inversível). A condição sobre J garante que o material não

penetra ele mesmo; em termos matemáticos, garante que o movimento preserva a orientação dos eixos coordenados (CIARLET, 1988).

O movimento de um corpo pode ser descrito de duas formas: descrição material (ou lagrangeana), na qual as variáveis independentes são as posições s da configuração de referência; e descrição espacial (ou euleriana), na qual as variáveis independentes são as posições r da configuração deformada. A descrição espacial normalmente é usada quando trabalha-se com fluidos em movimento e interessa-se pelo comportamento do fluxo em um volume de controle fixo no espaço. No caso estrutural estático tratado, deseja-se avaliar como cada parte do corpo original se deforma, sendo assim, a descrição material é mais conveniente.

O campo de deslocamentos u descreve quanto cada ponto de \mathbb{S}_0 deslocou-se com o movimento φ ; na descrição material, tem-se:

$$u(s) = \varphi(s) - s \quad (2.3)$$

Por concisão, o símbolo ' (s) ', que explicita que os campos tensoriais apresentados dependem da variável s , será omitido nas próximas equações.

Diferenciando a Equação 2.3, obtém-se ∇u em função de F e da matriz identidade I , de dimensões $(3, 3)$. Isolando o gradiente de deformação chega-se em:

$$F = I + \nabla u = I + \frac{\partial u}{\partial s} \quad (2.4)$$

Em notação indicial, representa-se a matriz identidade pelo Delta de Kroenecker δ_{ij} , logo:

$$F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial s_j} \quad (2.5)$$

Deseja-se definir uma medida de deformação que possa ser relacionada com os carregamentos aplicados ao corpo, para isso, buscam-se algumas propriedades. Movimentos rígidos (translações e rotações puras) não devem alterar a medida de deformação; a medida deve ser nula quando o corpo está descarregado e em repouso; e ela deve possuir um comportamento monótono em relação a um carregamento com direção fixa, ou seja, um carregamento maior deve implicar uma medida de deformação maior.

Com esse intuito, avalia-se o comportamento de uma fibra material, representada por um vetor diferencial que vai de um ponto de interesse \bar{s} ao ponto $\bar{s} + ds$ em seu arredor. Aplicando a função de movimento, determinam-se as novas extremidades da fibra nos pontos $\varphi(\bar{s})$ e $\varphi(\bar{s} + ds)$. Como a função de movimento deve ser pelo menos de classe \mathcal{C}^1 e ds é arbitrariamente pequeno, os pontos internos continuam a ser uma interpolação linear dos pontos extremos; dessa forma, tem-se que a fibra deformada é dada pelo vetor diferencial $dr = \varphi(\bar{s} +$

$ds) - \varphi(\bar{s})$. Novamente, considerando que φ é suficientemente regular e sendo ds tão pequeno quanto desejado, o primeiro termo pode ser igualado a sua aproximação de Taylor de primeira ordem: $\varphi(\bar{s} + ds) = \varphi(\bar{s}) + \nabla \varphi(\bar{s}) ds$. Obtém-se:

$$dr = F ds \quad (2.6)$$

A Figura 2.4 ilustra um corpo em deformação. A função de movimento φ e sua inversa φ^{-1} fazem o mapeamento entre o corpo de referência \mathbb{S}_0 e o corpo deformado \mathbb{S} . O gradiente de deformação F e sua inversa F^{-1} definem as transformações sobre as fibras materiais em torno de cada ponto \bar{s} e $\varphi(\bar{s})$.

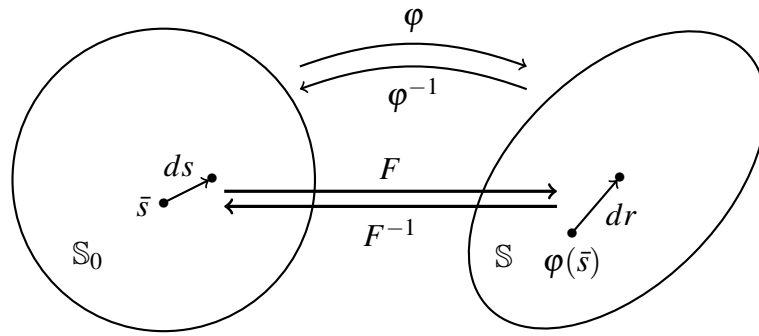


Figura 2.4 – Deformação de uma Fibra Material

Com isso, uma medida de deformação em um ponto de interesse pode ser construída avaliando-se o estiramento das fibras materiais em suas proximidades. Para avaliar o estiramento δs de uma fibra ds qualquer, faz-se a subtração $\delta s = dr^T dr - ds^T ds$; em termos do gradiente de deformação, tem-se $\delta s = ds^T (F^T F - I) ds$. Para obter uma medida relativa ao comprimento inicial da fibra, divide-se δs por $ds^T ds$, assim obtém-se:

$$\varepsilon = \frac{ds^T (F^T F - I) ds}{ds^T ds} = e_s^T (F^T F - I) e_s \quad (2.7)$$

Na Equação 2.7, e_s é o vetor unitário na direção da fibra original. Portanto, o escalar ε mede o estiramento relativo das fibras numa direção e_s qualquer. Generalizando para uma medida de deformação E^* qualquer, tem-se uma medida de estiramento relativo numa direção e_s como:

$$\varepsilon^* = e_s^T E^* e_s \quad (2.8)$$

O tensor $F^T F$ é chamado tensor de deformações de Cauchy-Green à direita C e é fundamental nas formulações materiais da Mecânica do Contínuo.

$$C = F^T F \quad (2.9)$$

O tensor $(C - I)$, da Equação 2.7, possui todas as propriedades desejadas para uma medida de deformação; ainda assim, é usual fazer uma pequena alteração. O tensor de deformações de Green-Lagrange E^g é dado pela seguinte matriz real e simétrica:

$$E^g = \frac{1}{2}(C - I) \quad (2.10)$$

Em termos do campo de deslocamentos, esse tensor de deformações é escrito como:

$$E^g = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T + \nabla u^T \nabla u) \quad (2.11)$$

Uma das consequências de incluir o divisor 2 é que o tensor de Green-Lagrange assume uma forma elegante quando um regime de pequenos deslocamentos e deformações é considerado. Quando todos os termos do gradiente dos deslocamentos são, em módulo, muito inferiores a 1, pode-se desprezar o termo quadrático, define-se assim o tensor de deformações infinitesimais E^i , amplamente utilizado em problemas estruturais:

$$E^i = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \quad (2.12)$$

É importante ressaltar que E^i não é uma medida de deformação verdadeira, já que é afetado por rotações rígidas, este tensor é uma aproximação que tem significado apenas quando os deslocamentos e deformações são suficientemente pequenos.

Uma forma mais geral para definir medidas de deformação é decompor o gradiente de deformação em dois termos, um correspondente à rotação e outro ao estiramento do corpo. Isso é feito pelo Teorema da Decomposição Polar (MARSDEN; HUGHES, 1994), que estabelece que toda matriz real inversível pode ser fatorada, de forma única, em uma matriz ortogonal R (matriz de rotação) e uma matriz simétrica e definida positiva U (matriz de estiramento) conforme a equação abaixo.

$$F = RU \quad (2.13)$$

Pelas propriedades do determinante, sendo R ortogonal e U definida positiva, observa-se que $\det(F) > 0$ implica $\det(R) = 1$; portanto, J ser positivo faz com que a matriz R represente de fato uma rotação própria. Caso J fosse negativo, ter-se-ia $\det(R) = -1$ e R representaria uma rotação imprópria, na qual a orientação dos eixos coordenados é alterada (o material penetra ele mesmo). Justifica-se assim a condição de positividade sobre J .

Combinando a Equação 2.9 e a Equação 2.13, obtém-se que $U^2 = C$. Como C é simétrica e definida positiva, sua raiz quadrada é única e pode ser obtida diagonalizando a

matriz e calculando a raiz de seus autovalores, denota-se:

$$U = C^{\frac{1}{2}} \quad (2.14)$$

Utilizando a matriz U , pode-se definir a seguinte família de tensores (SETH, 1961):

$$E^{(n)} = \begin{cases} \frac{U^n - I}{n} & , \quad n \neq 0 \\ \ln(U) & , \quad n = 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

Como U já desconsidera movimentos rígidos e é igual à matriz identidade quando o corpo não se deforma, para qualquer $n \in \mathbb{R}$, o tensor $E^{(n)}$ possui todas as propriedades desejadas para uma medida de deformação. O divisor n garante que todos os tensores dessa família tenham o mesmo comportamento quando em regime de pequenos deslocamentos e deformações (todos comportam-se como E^i). Observa-se que $E^{(0)} = \ln(U) = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{U^n - I}{n}$.

O tensor de deformações logarítmicas $E^{(0)}$ também é chamado de tensor de deformações de Hencky e é denotado aqui como E^h . Através da Equação 2.14 e pelas propriedades da função logarítmica, tem-se que:

$$E^h = \ln(U) = \frac{1}{2} \ln(C) \quad (2.16)$$

Como U e C são simétricas e definidas positivas, seus logaritmos são únicos e podem ser obtidos diagonalizando as matrizes e calculando o logaritmo de seus autovalores.

Ainda que qualquer tensor $E^{(n)}$ seja igualmente válido para representar a deformação de um corpo, destacam-se aqui os tensores de deformações infinitesimais E^i , Green-Lagrange E^g ($E^{(2)}$) e o de Hencky E^h ($E^{(0)}$) devido a suas interpretações geométricas e peculiaridades.

Para ilustrar a diferença entre esses tensores, considera-se um caso de estiramento unidimensional, uma barra de comprimento original l_0 que se deforma até atingir o comprimento l_1 . A cinemática é dada por $u = \{\frac{l_1 - l_0}{l_0} x, 0, 0\}^T, x \in [0, l_0]$. Conforme a Equação 2.8, os estiramentos ε^i , ε^g e ε^h , na direção de $e_x = \{1, 0, 0\}^T$, correspondentes aos tensores de deformação E^i , E^g e E^h , serão:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^i &= e_x^T E^i e_x = \frac{l_1 - l_0}{l_0} \\
 \varepsilon^g &= e_x^T E^g e_x = \frac{1}{2} \frac{l_1^2 - l_0^2}{l_0^2} \\
 \varepsilon^h &= e_x^T E^h e_x = \ln\left(\frac{l_1}{l_0}\right) = \int_{L=l_0}^{l_1} \frac{1}{L} dL
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

No primeiro caso, tem-se uma medida proporcional à diferença entre comprimento final e inicial; no segundo, tem-se uma medida proporcional à diferença dos quadrados dos comprimentos; no último, tem-se uma fórmula integral que corresponde à soma das deformações incrementais $\Delta\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$ quando ΔL tende a 0.

A Figura 2.5 apresenta a relação entre o comprimento do corpo deformado e os estiramentos descritos na Equação 2.17. No gráfico, o valor 0,69 corresponde a $\ln(2)$ com precisão de duas casas decimais.

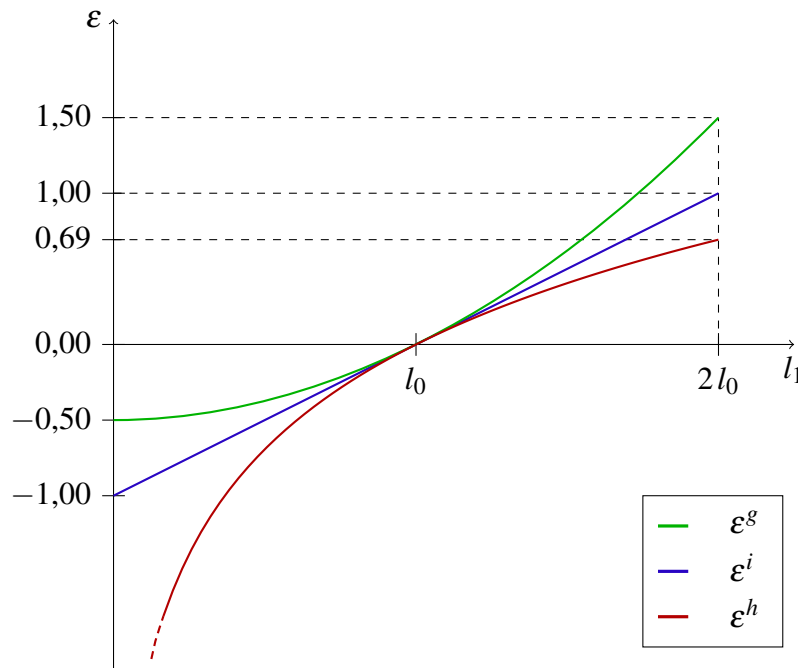


Figura 2.5 – Deformações em uma Barra Unidimensional

O estiramento obtido com aproximação de pequenos deslocamentos e deformações ε^i gera uma reta que assume o valor $-1,00$ quando o corpo é completamente comprimido e $1,00$ quando o corpo é tracionado até dobrar de tamanho. No caso de Green-Lagrange, ε^g descreve uma parábola convexa com vértice em $l_1 = 0$, que vale $-0,50$ quando a barra é completamente comprimida e $1,50$ quando ela é tracionada até dobrar de tamanho. Por fim, o estiramento logarítmico ε^h tende a $-\infty$ conforme o corpo é comprimido e cresce cada vez mais lentamente

conforme ele é tracionado, isso ocorre pois, neste caso, cada incremento de deformação é relativo ao comprimento atualizado do corpo. Por construção, as três medidas de deformação comportam-se da mesma forma quando l_1 tem valores próximos a l_0 .

Antes de decidir qual tensor de deformações utilizar na formulação do problema em questão, é necessário compreender como esses tensores se relacionam com os tensores de tensões.

2.3.2 Tensões

A tensão é uma grandeza que corresponde à força por unidade de área exercida em cada ponto de uma superfície imaginária qualquer dentro de um corpo. Ela descreve os esforços internos do corpo e deve ser tal que os balanços de momentos lineares e angulares sejam satisfeitos.

Considerando um corpo num estado qualquer \mathbb{S}_t , o balanço de momentos lineares é dado pela Equação 2.18, que deve ser satisfeita para todo subdomínio $\mathbb{X}_t \subset \mathbb{S}_t$ conexo e de contorno $\partial\mathbb{X}_t$ suave. Nela, ρ é o campo escalar das densidades, v é o campo vetorial de velocidades, b_c é o campo vetorial das forças de corpo e σ são as tensões sobre $\partial\mathbb{X}_t$. Os campos ρ , v e b_c são considerados funções contínuas dependentes da posição espacial r e do instante de tempo t .

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{X}_t} \rho v dV_{\mathbb{X}_t} = \int_{\mathbb{X}_t} \rho b_c dV_{\mathbb{X}_t} + \int_{\partial\mathbb{X}_t} \sigma dA_{\partial\mathbb{X}_t} \quad (2.18)$$

Nas mesmas condições, o balanço de momentos angulares é dado pela Equação 2.19.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{X}_t} \rho (r \wedge v) dV_{\mathbb{X}_t} = \int_{\mathbb{X}_t} \rho (r \wedge b_c) dV_{\mathbb{X}_t} + \int_{\partial\mathbb{X}_t} r \wedge \sigma dA_{\partial\mathbb{X}_t} \quad (2.19)$$

Por sua vez, no problema estrutural estático, sem fluxos mássicos, a conservação de massa é dada pela Equação 2.20.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{X}_t} \rho dV_{\mathbb{X}_t} = 0 \quad (2.20)$$

Tomando como hipótese que σ depende somente da posição espacial r , do instante de tempo t e do vetor n , normal ao contorno $\partial\mathbb{X}_t$ em r , o Teorema de Cauchy (MARSDEN; HUGHES, 1994) estabelece que se o balanço de momentos lineares (Equação 2.18) é satisfeito para todo $\mathbb{X}_t \subset \mathbb{S}_t$, existe um único campo tensorial T^c em \mathbb{S}_t , de dimensões $(3, 3)$ dependente somente de r e t , tal que:

$$\sigma(r, t, n) = T^c(r, t) \cdot n \quad (2.21)$$

O tensor T^c é chamado de tensor de tensões de Cauchy, ele define o estado de tensão em cada ponto do corpo.

Considerando que a conservação de massa (Equação 2.20) e o balanço de momentos lineares (Equação 2.18) são cumpridos, o balanço de momentos angulares (Equação 2.19) é satisfeito se, e somente se, T^c é simétrico (MARSDEN; HUGHES, 1994).

O trabalho W de uma carga P_f dependente da posição espacial r , variando no tempo sobre uma trajetória c , é dado por:

$$W = \int_c P_f \cdot dr \quad (2.22)$$

Diferenciando a Equação 2.22, obtém-se uma expressão para a potência \dot{W} em função da velocidade v .

$$\dot{W} = \frac{\partial W}{\partial t} = P_f \cdot v \quad (2.23)$$

Pela expressão de potência (Equação 2.23), usando o balanço de momentos lineares (Equação 2.18) e a conservação de massa (Equação 2.20), obtém-se a seguinte expressão para a potência \dot{W}_{def} , correspondente à deformação de $\mathbb{X}_t \subset \mathbb{S}_t$:

$$\dot{W}_{\text{def}} = \int_{\mathbb{X}_t} T^c : \nabla v dV_{\mathbb{X}_t} \quad (2.24)$$

Na descrição material, tem-se a integral sobre o subdomínio não deformado $\mathbb{X}_0 \subset \mathbb{S}_0$:

$$\dot{W}_{\text{def}} = \int_{\mathbb{X}_0} J T^c : \nabla v dV_{\mathbb{X}_0} \quad (2.25)$$

Através da Equação 2.25 pode-se definir um tensor de tensões conjugado a cada tensor de deformações, de maneira a conservar a potência de deformação. Ou seja, os tensores de tensões T^g e T^h , conjugados de potência de E^g e E^h respectivamente, devem ser tais que:

$$\dot{W}_{\text{def}} = \int_{\mathbb{X}_0} J T^c : \nabla v dV_{\mathbb{X}_0} = \int_{\mathbb{X}_0} T^g : \dot{E}^g dV_{\mathbb{X}_0} = \int_{\mathbb{X}_0} T^h : \dot{E}^h dV_{\mathbb{X}_0} \quad (2.26)$$

Observa-se que o ponto sobre as variáveis é utilizado para indicar a derivada temporal $\left(\dot{E}^* = \frac{\partial E^*}{\partial t}\right)$.

Considerando condições de isotropia, pela Equação 2.26, os tensores de tensões podem ser relacionados (CRISFIELD, 1997):

$$\begin{cases} T^g = J F^{-1} T^c F^{-T} \\ T^h = J R^T T^c R \\ T^h = U T^g U \end{cases} \quad (2.27)$$

O tensor T^g , conjugado do tensor de Green-Lagrange E^g , é chamado de Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff, o tensor T^h é chamado de tensor de tensões de Hencky. Observa-se pela Equação 2.27 que tanto T^g quanto T^h devem ser simétricos para que o balanço de momentos angulares (Equação 2.19) seja satisfeito.

O que resta definir para relacionar os tensores de deformações com os tensores de tensões é uma lei constitutiva que determina o comportamento do material considerado. Como os pares conjugados são relacionados através da equivalência de potências, ao definir a relação entre um par de tensores, define-se automaticamente relações correspondentes para todos os outros pares.

Há, entretanto, algumas restrições para definir uma lei constitutiva. Considerando a situação proposta, sem efeitos dinâmicos, com processos elásticos, reversíveis e isotérmicos, espera-se que o tensor de tensões de Cauchy T^c seja uma função do gradiente de deformações F , o que é equivalente a T^g e T^h serem funções de F .

$$T^c = \hat{T}^c(F) \Leftrightarrow T^g = \hat{T}^g(F) \Leftrightarrow T^h = \hat{T}^h(F) \quad (2.28)$$

Uma das restrições que devem ser cumpridas é que T^c seja invariante pelo observador. Essa condição ocorre se, e somente se, T^g for uma função de C (CIARLET, 1988). Pela Equação 2.27 é necessário que T^h seja também uma função de C . Assim, tem-se uma situação mais específica:

$$T^g = \tilde{T}^g(C) \Leftrightarrow T^h = \tilde{T}^h(C) \quad (2.29)$$

A hipótese de que o material é isotrópico, isto é, possui as mesmas propriedades físicas independentemente da direção considerada, impõe uma segunda restrição sobre T^c e, consequentemente, sobre os outros tensores de tensões. Partindo do Teorema da Representação de Rivlin-Ericksen (CIARLET, 1988), chega-se que, num material isotrópico, o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, T^g , deve ter a seguinte forma:

$$T^g = -\pi I + \lambda \operatorname{tr}(E^g) I + 2\mu E^g + o(E^g) \quad (2.30)$$

Destaca-se que E^g é função de C (Equação 2.10), portanto a invariância pelo observador é cumprida. Na equação Equação 2.30, π , λ e μ são campos escalares que independem de E^g ; e a parcela $o(E^g)$ aglutina os termos de alta ordem (maior que 1).

Considerando que não há tensões na configuração de referência, π vale 0; além disso, assumindo um material homogêneo, isto é, um material que possui as mesmas propriedades em todos os pontos, as funções λ e μ são constantes e passam a ser chamadas de parâmetros de Lamé.

Nessas condições, desconsiderando termos de alta ordem da Equação 2.30, obtém-se o modelo de Saint Venant-Kirchhoff, no qual T^g possui a seguinte relação linear com E^g :

$$T^g = \lambda \operatorname{tr}(E^g) I + 2\mu E^g \quad (2.31)$$

Outra possibilidade de desenvolvimento é assumir de início uma relação constitutiva linear entre um par T^* e E^* qualquer, isso resulta na lei de Hooke generalizada (CHEN; SALEEB, 2013):

$$T^* = D^p : E^* \Leftrightarrow T_{ij}^* = D_{ijpq}^p E_{pq}^* \quad (2.32)$$

O tensor de quarta ordem D^p , de dimensões $(3,3,3,3)$, é usado como operador linear e, *a priori*, possui 81 termos independentes que definem as propriedades do material. A isotropia do material impõe que D^p tenha a seguinte forma (CHEN; SALEEB, 2013):

$$D_{ijpq}^p = \lambda \delta_{ij} \delta_{pq} + \mu (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) + \bar{\mu} (\delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}) \quad (2.33)$$

Como todos os tensores T^* e E^* considerados são simétricos por construção, obtém-se que $\bar{\mu}$ deve ser igual a 0. Por fim, assumindo um material homogêneo, tem-se que λ e μ devem ser constantes. Chega-se na lei de Hooke para materiais homogêneos e isotrópicos:

$$T^* = \lambda \operatorname{tr}(E^*) I + 2\mu E^* \quad (2.34)$$

Uma relação linear entre tensão e deformação é conveniente para a resolução do problema, contudo, é necessário que ela seja capaz de representar devidamente o comportamento físico esperado para o material sendo deformado. Para relacionar os possíveis modelos com o comportamento do corpo sob carregamento é necessário definir qual a equação de equilíbrio que rege o fenômeno em questão.

2.3.3 Equilíbrio Estático

Optou-se por utilizar o princípio dos trabalhos virtuais (CRISFIELD, 1991) para descrever o comportamento do corpo sendo deformado por um carregamento externo. Afirmar-

se que, na condição de equilíbrio estático, nenhuma pequena variação virtual do campo de deslocamentos δu altera a energia potencial do sistema Π ; em outras palavras a variação virtual de energia potencial $\delta\Pi$ produzida por δu vale 0.

$$\delta\Pi = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} = 0 \quad (2.35)$$

Na Equação 2.35, δW_{int} e δW_{ext} correspondem, respectivamente, às variações virtuais do trabalho referente às forças internas W_{int} e do trabalho referente às forças externas W_{ext} .

No modelo adotado para as microestruturas, δW_{int} é composta por um termo estrutural δW_s e um termo correspondente a molas fixadas em determinados pontos da estrutura δW_k ; enquanto que δW_{ext} é composta por um termo correspondente a carregamentos hidrostáticos δW_p e um termo δW_f , correspondente a forças pontuais que podem ser aplicadas sobre a estrutura.

$$\delta\Pi = \delta W_s + \delta W_k - \delta W_p - \delta W_f = 0 \quad (2.36)$$

Utiliza-se o delta de Dirac δ_d para representar pontualmente cargas e molas atuando em uma pequena região. Define-se δ_D como:

$$\delta_D(s) = \delta_D(s_1, s_2, s_3) = \delta_d(s_1) \delta_d(s_2) \delta_d(s_3) \quad (2.37)$$

Com isso, sendo o conjunto de vetores de forças $\{P_f^{(1)}, P_f^{(2)}, \dots, P_f^{(n_f)}\}$ aplicadas nas posições $\{s_a^{(1)}, s_a^{(2)}, \dots, s_a^{(n_f)}\}$, tem-se que:

$$\delta W_f = \int_{\mathbb{X}_0} \sum_{i=1}^{n_f} \left(\delta_D(s - s_a^{(i)}) P_f^{(i)} \right) \cdot \delta u dV_{\mathbb{X}_0} \quad (2.38)$$

Analogamente, sendo $\{M_k^{(1)}, M_k^{(2)}, \dots, M_k^{(n_k)}\}$ o conjunto de matrizes diagonais de rigidez, de dimensões (3,3) para o caso tridimensional, posicionadas em $\{s_b^{(1)}, s_b^{(2)}, \dots, s_b^{(n_k)}\}$ e cujos componentes correspondem às projeções das constantes de mola sobre os eixos coordenados, tem-se que:

$$\delta W_k = \int_{\mathbb{X}_0} \sum_{i=1}^{n_k} \left(\delta_D(s - s_b^{(i)}) M_k^{(i)} \cdot u \right) \cdot \delta u dV_{\mathbb{X}_0} \quad (2.39)$$

Considera-se um fluido de pressão p_c atuando no interior do contorno $\partial\mathbb{X}$, a variação virtual de trabalho devido a uma variação do volume do subdomínio $\delta V_{\mathbb{X}}$ é dada por:

$$\delta W_p = p_c \delta V_{\mathbb{X}} = p_c \frac{\partial V_{\mathbb{X}}}{\partial u} \cdot \delta u \quad (2.40)$$

Por sua vez, para determinar δW_s , utilizou-se um modelo de material hiperelástico (CRISFIELD, 1997). Assim, assume-se que existe uma função densidade de energia de deformação Ψ^* , dependente somente do tensor de deformações E^* , sendo o tensor de tensões T^* tal que:

$$T^* = \frac{\partial \Psi^*}{\partial E^*} \quad (2.41)$$

Mantendo a relação linear da Equação 2.34, obtém-se:

$$\Psi^* = \frac{1}{2} (T^* : E^*) = \frac{\lambda}{2} [\text{tr}(E^*)]^2 + \mu \text{tr}([E^*]^2) \quad (2.42)$$

Através da Equação 2.41, chega-se em:

$$\delta W_s = \int_{\mathbb{X}_0} \delta \Psi^* dV_{\mathbb{X}_0} = \int_{\mathbb{X}_0} \frac{\partial \Psi^*}{\partial E^*} : \delta E^* dV_{\mathbb{X}_0} = \int_{\mathbb{X}_0} T^* : \delta E^* dV_{\mathbb{X}_0} \quad (2.43)$$

Ou ainda:

$$\delta W_s = \int_{\mathbb{X}_0} \left(T^* : \frac{\partial E^*}{\partial u} \right) \cdot \delta u dV_{\mathbb{X}_0} \quad (2.44)$$

Para avaliar as diferenças entre os modelos de material elegíveis, considera-se o caso específico no qual não há molas, não há fluido pressurizado e há uma única carga pontual P_f aplicada em s_a . Neste caso, a Equação 2.36 para o domínio total \mathbb{S}_0 torna-se:

$$\delta \Pi = \int_{\mathbb{S}_0} \left(T^* : \frac{\partial E^*}{\partial u} - \delta_D(s - s_a) P_f \right) \cdot \delta u dV_{\mathbb{S}_0} = 0 \quad (2.45)$$

Como isso deve ser válido para qualquer pequeno deslocamento virtual δu , tem-se:

$$\int_{\mathbb{S}_0} \left(T^* : \frac{\partial E^*}{\partial u} - \delta_D(s - s_a) P_f \right) dV_{\mathbb{S}_0} = 0 \Rightarrow \int_{\mathbb{S}_0} T^* : \frac{\partial E^*}{\partial u} dV_{\mathbb{S}_0} = P_f \quad (2.46)$$

Considerando novamente o caso unidimensional, cujos estiramentos são apresentados na Equação 2.17 da subseção 2.3.1, e usando a Equação 2.34, a Equação 2.46 simplifica-se em:

$$\alpha \varepsilon^* \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial l_1} = P_f \quad (2.47)$$

Na Equação 2.47, α é uma constante dependente dos parâmetros de Lamé, λ e μ , e do volume de \mathbb{S}_0 ; enquanto ε e l_1 correspondem, respectivamente, ao estiramento da barra e a seu comprimento final.

Desconsiderando a aproximação infinitesimal ε^i , obtêm-se as seguintes expressões:

$$\left| \begin{array}{l} \alpha^g l_1 (l_1^2 - l_0^2) = P_f^g \\ \alpha^h \ln\left(\frac{l_1}{l_0}\right) \frac{1}{l_1} = P_f^h \end{array} \right. \quad (2.48)$$

A primeira corresponde ao modelo de Saint Venant-Kirchhoff, com uma relação linear entre T^g e E^g , e a segunda ao modelo de Hencky (XIAO, 2005), com uma relação linear entre T^h e E^h ; α^g e α^h aglutinam as constantes da expressão. Assim, para cada modelo, tem-se uma expressão para o carregamento, P_f^g ou P_f^h , em função do comprimento final da barra l_1 ; a Figura 2.6 apresenta suas curvas.

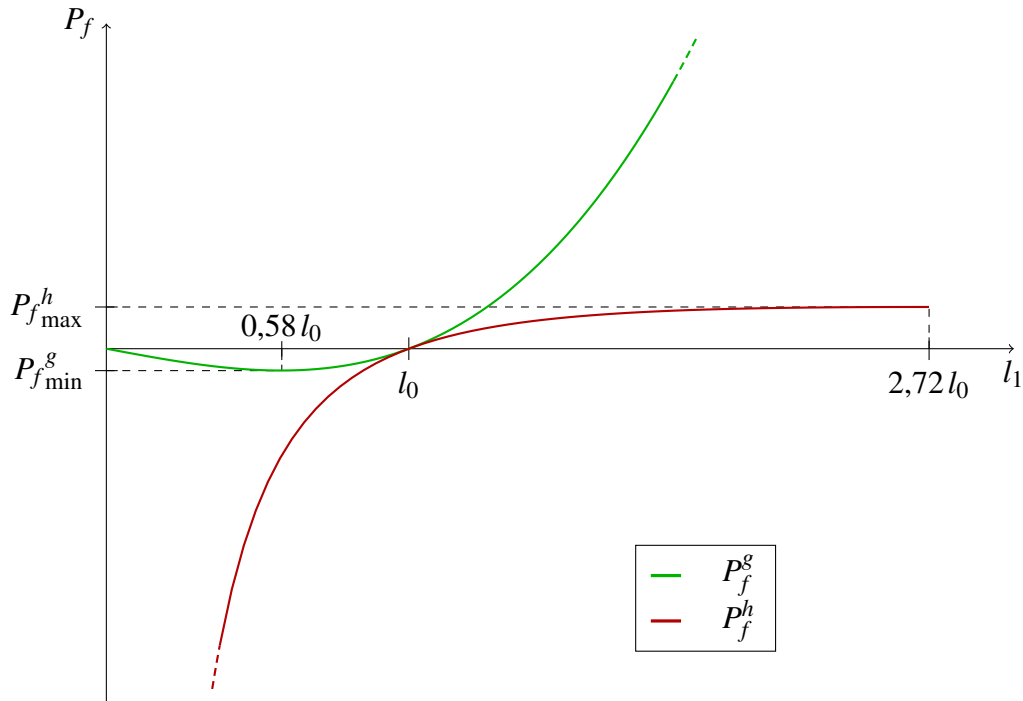


Figura 2.6 – Comparação Unidimensional entre Modelos de Materiais

No modelo de Saint Venant-Kirchhoff, a carga possui comportamento monótono para l_1 entre $\frac{l_0}{\sqrt{3}}$ (apresentado com dois algarismos significativos como $0,58 l_0$) até $+\infty$; enquanto que no modelo de Hencky, o comportamento monótono vai de 0 até $e l_0$ (apresentado com dois algarismos significativos como $2,72 l_0$).

Embora ambos os modelos tenham limitações específicas, o primeiro quando sob compressões elevadas e o segundo quando sob trações elevadas, o modelo de Hencky mostra-se mais adequado para tratar problemas em regime de grandes deslocamentos e deformações (PLEŠEK; KRUIŠOVÁ, 2006). Assim, este foi o modelo escolhido para representar as estruturas em questão.

Dessa forma, o material é completamente determinado por seus dois parâmetros de Lamé. Definindo-se o módulo de Young E_y^0 e o coeficiente de Poisson ν^0 através do ensaio unidimensional descrito pela Equação 2.49, que representa uma barra sob tração, chega-se, pela relação linear da Equação 2.34, na relação apresentada na Equação 2.50.

$$\left| \begin{array}{l} T_{11}^h = E_y^0 E_{11}^h \\ T_{ij}^h = 0, \forall (i, j) \neq (1, 1) \\ E_{22}^h = E_{33}^h = -\nu^0 E_{11}^h \end{array} \right. \quad (2.49)$$

$$\left| \begin{array}{l} \lambda = \frac{\nu^0 E_y^0}{(1 + \nu^0)(1 - 2\nu^0)} \\ \mu = \frac{E_y^0}{2(1 + \nu^0)} \end{array} \right. \quad (2.50)$$

Observa-se que ambos são proporcionais a módulo de Young E_y^0 .

Considerando estruturas bidimensionais: em EPT, normalmente usado para representar chapas finas, tem-se que $T_{13}^h = T_{31}^h = T_{23}^h = T_{32}^h = T_{33}^h = 0$; em EPD, normalmente usado para representar estruturas espessas, tem-se que $E_{13}^h = E_{31}^h = E_{23}^h = E_{32}^h = E_{33}^h = 0$. Como no termo estrutural (Equação 2.44), há um produto duplo, em ambos os casos apenas as matrizes reduzidas T e E são relevantes para a obtenção do campo de deslocamentos.

$$\left| \begin{array}{l} T = \begin{bmatrix} T_{11}^h & T_{12}^h \\ T_{21}^h & T_{22}^h \end{bmatrix} \\ E = \begin{bmatrix} E_{11}^h & E_{12}^h \\ E_{21}^h & E_{22}^h \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.51)$$

Nessas condições, usando a Equação 2.34 pode-se relacionar esses tensores reduzidos através da Equação 2.52, quando em EPT, e da Equação 2.53, quando em EPD. Nelas, I é a matriz identidade de dimensões $(2, 2)$.

$$\left| \begin{array}{l} T = \lambda_t \text{tr}(E) I + 2\mu_t E \\ \lambda_t = \frac{2\mu\lambda}{2\mu + \lambda} \\ \mu_t = \mu \end{array} \right. \quad (2.52)$$

$$\left| \begin{array}{l} T = \lambda_d \text{tr}(E) I + 2\mu_d E \\ \lambda_d = \lambda \\ \mu_d = \mu \end{array} \right. \quad (2.53)$$

Através da Equação 2.34, pode-se observar que, em ambos os estados planos, E_{13}^h , E_{23}^h , E_{31}^h , E_{32}^h , T_{13}^h , T_{23}^h , T_{31}^h e T_{32}^h são nulos; e, conhecendo-se E , obtém-se o termo desconhecido, E_{33}^h ou T_{33}^h , avaliando essa equação na posição (3,3):

$$T_{33}^h = \lambda \operatorname{tr}(E) + (\lambda + 2\mu) E_{33}^h \quad (2.54)$$

Uma vez que as equações dos dois estados planos são sempre equivalentes, exceto da alteração sobre os coeficientes de Lamé, para evitar redundâncias, no restante das formulações apenas o EPT será considerado.

Enfim, o problema estrutural estático, com material homogêneo e isotrópico, adotando o modelo hiperelástico de Hencky resume-se em encontrar o campo de deslocamentos u que soluciona a equação dos trabalhos virtuais (Equação 2.36), para qualquer deslocamento virtual δu e para todo $\mathbb{X}_0 \subset \mathbb{S}_0$, com a seguinte expressão para δW_s :

$$\delta W_s = \int_{\mathbb{X}_0} \left(T : \frac{\partial E}{\partial u} \right) \cdot \delta u dV_{\mathbb{X}_0} \quad (2.55)$$

Na qual os tensores relacionam-se com u da forma:

$$\left| \begin{array}{l} F = I + \nabla u \\ C = F^T F \\ E = \frac{1}{2} \ln(C) \\ T = \lambda_t \operatorname{tr}(E) I + 2\mu_t E \end{array} \right. \quad (2.56)$$

Evitando acrescentar demais as notações, mantiveram-se os símbolos dos tensores ∇u , F e C , mesmo que aqui eles correspondam a suas versões reduzidas, de dimensões (2,2).

2.4 Simulação Numérica

2.4.1 Formulação do Microelemento Estrutural

Para solucionar numericamente a Equação 2.36, o MEF foi utilizado. Este método possui algumas vantagens sobre outros métodos de análise numérica: ele é aplicável em uma vasta gama de problemas (análise estrutural, de transferência de calor, de eletromagnetismo); não há restrições geométricas para o corpo analisado; diferentes tipos de componentes (barras, vigas, cabos, molas) podem ser combinados sem dificuldades; a qualidade da aproximação do resultado pode ser facilmente melhorada fazendo refinamentos inteligentes da malha (COOK *et al.*, 2002).

No problema em questão, o método consiste em discretizar o domínio em uma quantidade finita de elementos e assumir um comportamento conhecido para o campo de deslocamentos no interior de cada elemento, dependente apenas dos deslocamentos em alguns pontos

específicos do elemento, seus nós. Com isso, a complexidade do problema é reduzida: ao invés de buscar um campo contínuo definido em todo o domínio, passa-se a buscar apenas um vetor finito de deslocamentos nodais.

Dado um elemento e correspondente ao subdomínio \mathbb{X}_0 , tem-se que o campo de deslocamentos u em seu interior é dado por:

$$u^T(s) = N^*(s) \tilde{a} \quad (2.57)$$

Na Equação 2.57, N^* é uma matriz, usualmente de funções polinomiais, que define o elemento finito; e \tilde{a} é a matriz de deslocamentos nodais (que independe da posição s dentro do elemento). Assumindo que u é suficientemente regular, quanto maior o grau das funções de N^* e quanto menores as dimensões do elemento, mais a resposta numérica se aproxima da resposta do problema analítico. Neste trabalho consideram-se apenas problemas bidimensionais, portanto, \tilde{a} possui duas colunas, a primeira relativa aos deslocamentos horizontais e a segunda aos deslocamentos verticais. Quanto a suas linhas, cada uma corresponde a um nó do elemento.

Com o intuito de obter uma formulação simples e de facilitar as operações de integração, parametriza-se as posições espaciais s e o campo de deslocamentos u para que o elemento seja considerado num espaço de coordenadas generalizadas ξ . Quando se usa a mesma matriz de parametrização N para definir as coordenadas espaciais s e a variável de interesse u , o elemento é chamado de isoparamétrico (BATHE, 1996).

$$\left| \begin{array}{l} s^T(\xi) = N(\xi) \tilde{b} \\ u^T(\xi) = N(\xi) \tilde{a} \end{array} \right. \quad (2.58)$$

Na Equação 2.58, \tilde{b} corresponde à matriz das coordenadas dos nós do elemento.

Neste trabalho, utilizaram-se dois tipos de elementos isoparamétricos: o quadrangular de 4 nós (Quad4); e o quadrangular de 8 nós (Quad8). Nestes elementos, cada termo do vetor de coordenadas generalizadas $\xi = \{\xi_1, \xi_2\}^T$ assume valores em $[-1, 1]$, conforme ilustrado na Figura 2.7 e Figura 2.8. Suas respectivas matrizes de funções de forma são apresentadas na Equação 2.59 e Equação 2.60 (COOK *et al.*, 2002).

$$\left| \begin{array}{l} N = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \\ N_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2) & N_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2) \\ N_2 = \frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2) & N_4 = \frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2) \end{array} \right. \quad (2.59)$$

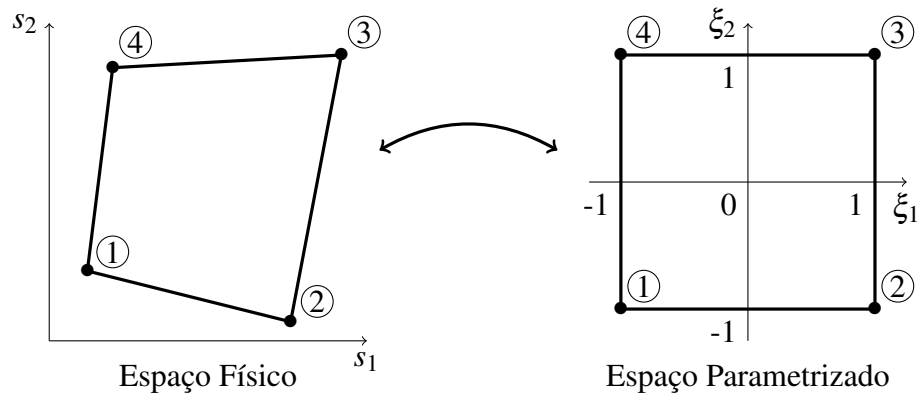


Figura 2.7 – Elemento Isoparamétrico de 4 Nós

$$\begin{aligned}
 N &= \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & N_5 & N_6 & N_7 & N_8 \end{bmatrix} \\
 N_1 &= -\frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2)(1 + \xi_1 + \xi_2) & N_5 &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)(1 - \xi_2) \\
 N_2 &= -\frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2)(1 - \xi_1 + \xi_2) & N_6 &= \frac{1}{2}(1 + \xi_1)(1 - \xi_2^2) \\
 N_3 &= -\frac{1}{4}(1 + \xi_1)(1 + \xi_2)(1 - \xi_1 - \xi_2) & N_7 &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1^2)(1 + \xi_2) \\
 N_4 &= -\frac{1}{4}(1 - \xi_1)(1 + \xi_2)(1 + \xi_1 - \xi_2) & N_8 &= \frac{1}{2}(1 - \xi_1)(1 - \xi_2^2)
 \end{aligned} \tag{2.60}$$

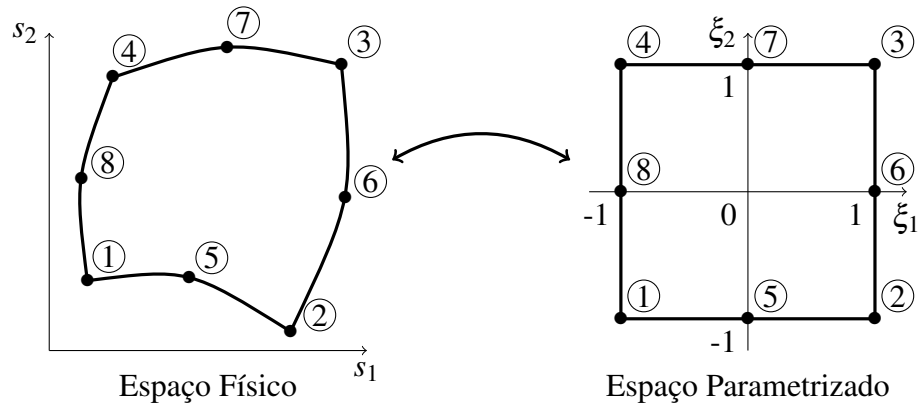


Figura 2.8 – Elemento Isoparamétrico de 8 Nós

Assim, sendo m o número de nós do elemento, tanto para os Quad4 quanto para os Quad8, as coordenadas espaciais no interior do elemento são descritas conforme a Equação 2.61 e os deslocamentos conforme a Equação 2.62.

$$s^T = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \\ \vdots & \vdots \\ b_{2m-1} & b_{2m} \end{bmatrix} = N \tilde{b} \tag{2.61}$$

$$u^T = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & \dots & N_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \\ \vdots & \vdots \\ a_{2m-1} & a_{2m} \end{bmatrix} = N \tilde{a} \quad (2.62)$$

As matrizes J_s e J_u das derivadas das coordenadas espaciais e dos deslocamentos em relação às coordenadas generalizadas são dadas pela Equação 2.63 e Equação 2.64 respectivamente.

$$J_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial s_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial s_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial s_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \\ \vdots & \vdots \\ b_{2m-1} & b_{2m} \end{bmatrix} = B \tilde{b} \quad (2.63)$$

$$J_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial u_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \\ \vdots & \vdots \\ a_{2m-1} & a_{2m} \end{bmatrix} = B \tilde{a} \quad (2.64)$$

Nessas expressões, a matriz B corresponde à matriz de derivadas de N :

$$B_{ij} = \frac{\partial N_j}{\partial \xi_i} \quad (2.65)$$

Como as funções de N definem um \mathcal{C}^1 -difeomorfismo entre as coordenadas espaciais no domínio do elemento e as coordenadas generalizadas em $\mathbb{E} = \{[-1, 1] \times [-1, 1]\}$, J_s é inversível e pode-se usar a regra da cadeia para obter G , matriz transposta do gradiente do campo de deslocamentos:

$$G = \nabla u^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial s_1} & \frac{\partial u_2}{\partial s_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial s_2} & \frac{\partial u_2}{\partial s_2} \end{bmatrix} = J_s^{-1} J_u = J_s^{-1} B \tilde{a} \quad (2.66)$$

Definindo a matriz P como:

$$P = J_s^{-1} B \quad (2.67)$$

Tem-se, de forma mais concisa:

$$G = P \tilde{a} \quad (2.68)$$

Utiliza-se um tensor constante Q , de terceira ordem e dimensões $(m, 2, 2m)$, para realocar as incógnitas (deslocamentos nodais) em um vetor $a = \{a_1, a_2, \dots, a_{2m}\}^T$ de dimensão $(2m)$:

$$Q_{ijk} = \begin{cases} 1 & , \quad k = 2(i-1) + j \\ 0 & , \quad k \neq 2(i-1) + j \end{cases} \quad (2.69)$$

Assim, a matriz \tilde{a} e o vetor a se correspondem da seguinte forma:

$$\left| \begin{array}{l} \tilde{a} = Q \cdot a \\ a = \tilde{a} : Q \end{array} \right. \quad (2.70)$$

Pode-se definir a mesma relação entre \tilde{b} e o vetor de coordenadas nodais b :

$$\left| \begin{array}{l} \tilde{b} = Q \cdot b \\ b = \tilde{b} : Q \end{array} \right. \quad (2.71)$$

Combinando a Equação 2.62 e a Equação 2.70, pode-se descrever o campo de deslocamentos e seu gradiente através dos tensores H e D aplicados no vetor de deslocamentos nodais a :

$$\left| \begin{array}{l} u^T = (N \cdot Q) \cdot a = H \cdot a \Rightarrow u = H a \\ G = \nabla u^T = (P \cdot Q) \cdot a = D \cdot a \end{array} \right. \quad (2.72)$$

Usando essa discretização, considerando um elemento finito de domínio $\mathbb{X}_0 \subset \mathbb{S}_0$, aplicando a Equação 2.38, a Equação 2.39, a Equação 2.40 e a Equação 2.55 na Equação 2.36, chega-se em:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & \int_{\mathbb{X}_0} \left(T : \frac{\partial E}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial a} \right) \cdot \delta a dV_{\mathbb{X}_0} \\ & + \int_{\mathbb{X}_0} \sum_{i=1}^{n_k} \left(\delta_D \left(s - s_b^{(i)} \right) \left(M_k^{(i)} \cdot u \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial a} \right) \cdot \delta a dV_{\mathbb{X}_0} \\ & - p_c \frac{\partial V_{\mathbb{X}}}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial a} \cdot \delta a - \int_{\mathbb{X}_0} \sum_{i=1}^{n_f} \left(\delta_D \left(s - s_a^{(i)} \right) P_f^{(i)} \cdot \frac{\partial u}{\partial a} \right) \cdot \delta a dV_{\mathbb{X}_0} = \\ & \int_{\mathbb{X}_0} \left(T : \frac{\partial E}{\partial a} \right) \cdot \delta a dV_{\mathbb{X}_0} + \int_{\mathbb{X}_0} \sum_{i=1}^{n_k} \left(\delta_D \left(s - s_b^{(i)} \right) \left(M_k^{(i)} \cdot u \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial a} \right) \cdot \delta a dV_{\mathbb{X}_0} \\ & - p_c \frac{\partial V_{\mathbb{X}}}{\partial a} \cdot \delta a - \int_{\mathbb{X}_0} \sum_{i=1}^{n_f} \left(\delta_D \left(s - s_a^{(i)} \right) P_f^{(i)} \cdot \frac{\partial u}{\partial a} \right) \cdot \delta a dV_{\mathbb{X}_0} = 0 \end{aligned} \quad (2.73)$$

Como δa independe das coordenadas espaciais, tem-se:

$$\delta \Pi = \left[\int_{\mathbb{X}_0} \left(T : \frac{\partial E}{\partial a} \right) dV_{\mathbb{X}_0} + \int_{\mathbb{X}_0} \sum_{i=1}^{n_k} \left(\delta_D \left(s - s_b^{(i)} \right) \left(M_k^{(i)} \cdot u \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial a} \right) dV_{\mathbb{X}_0} \right. \\ \left. - p_c \frac{\partial V_{\mathbb{X}}}{\partial a} - \int_{\mathbb{X}_0} \sum_{i=1}^{n_f} \left(\delta_D \left(s - s_a^{(i)} \right) P_f^{(i)} \cdot \frac{\partial u}{\partial a} \right) dV_{\mathbb{X}_0} \right] \cdot \delta a = 0 \quad (2.74)$$

Enfim, como a Equação 2.74 deve valer para qualquer variação virtual δa , chega-se numa expressão para o resíduo ψ , que deve ser nulo para cada elemento finito da estrutura:

$$\psi = \int_{\mathbb{X}_0} \left(T : \frac{\partial E}{\partial a} \right) dV_{\mathbb{X}_0} + \int_{\mathbb{X}_0} \sum_{i=1}^{n_k} \left(\delta_D \left(s - s_b^{(i)} \right) \left(M_k^{(i)} \cdot u \right) \cdot \frac{\partial u}{\partial a} \right) dV_{\mathbb{X}_0} \\ - p_c \frac{\partial V_{\mathbb{X}}}{\partial a} - \int_{\mathbb{X}_0} \sum_{i=1}^{n_f} \left(\delta_D \left(s - s_a^{(i)} \right) P_f^{(i)} \cdot \frac{\partial u}{\partial a} \right) dV_{\mathbb{X}_0} = \\ \int_{\mathbb{X}_0} \left(T : \frac{\partial E}{\partial a} \right) dV_{\mathbb{X}_0} + \sum_{i=1}^{n_k} \left(M_k^{(i)} \cdot u(s_b^{(i)}) \right) \cdot H(s_b^{(i)}) \\ - p_c \frac{\partial V_{\mathbb{X}}}{\partial a} - \sum_{i=1}^{n_f} P_f^{(i)} \cdot H(s_a^{(i)}) = 0 \quad (2.75)$$

Separam-se os termos do resíduo em um termo estrutural ψ_s , um termo correspondente às molas ψ_k , um termo correspondente ao carregamento hidrostático ψ_p e um termo correspondente às cargas pontuais aplicadas ψ_f :

$$\left| \begin{aligned} \psi_s &= \int_{\mathbb{X}_0} \left(T : \frac{\partial E}{\partial a} \right) dV_{\mathbb{X}_0} \\ \psi_k &= \sum_{i=1}^{n_k} \left(M_k^{(i)} \cdot u(s_b^{(i)}) \right) \cdot H(s_b^{(i)}) \\ \psi_p &= p_c \frac{\partial V_{\mathbb{X}}}{\partial a} \\ \psi_f &= \sum_{i=1}^{n_f} P_f^{(i)} \cdot H(s_a^{(i)}) \end{aligned} \right. \quad (2.76)$$

Com isso, a equação de equilíbrio de cada elemento pode ser escrita como:

$$\psi = \psi_s + \psi_k - \psi_p - \psi_f = 0 \quad (2.77)$$

Considerando cargas aplicadas apenas sobre os nós dos elementos, têm-se os vetores $P_g^{(i)}$ de dimensão $(2m)$, que correspondem às cargas aplicadas em cada grau de liberdade

do elemento por $P_f^{(i)}$. Em outras palavras, o vetor $P_g^{(i)}$ assume os valores de $P_f^{(i)}$ nas linhas correspondentes ao nó posicionado em $s_a^{(i)}$ e vale 0 no restante.

$$\begin{cases} P_g^{(i)} = H^T(s_a^{(i)}) P_f^{(i)} \\ P_f^{(i)} = H(s_a^{(i)}) P_g^{(i)} \end{cases} \quad (2.78)$$

Faz-se a mesma consideração para as molas, assim, tem-se a matriz diagonal de rigidez $M_g^{(i)}$ de dimensões $(2m, 2m)$, na qual cada termo corresponde a um grau de liberdade do elemento. A matriz $M_g^{(i)}$ assume os valores de $M_k^{(i)}$ nas linhas e colunas correspondentes ao nó posicionado em $s_b^{(i)}$ e vale 0 no restante.

$$\begin{cases} M_g^{(i)} = H^T(s_b^{(i)}) M_k^{(i)} H(s_b^{(i)}) \\ M_k^{(i)} = H(s_b^{(i)}) M_g^{(i)} H^T(s_b^{(i)}) \end{cases} \quad (2.79)$$

Usando a Equação 2.72, Equação 2.76, Equação 2.78 e Equação 2.79 obtêm-se as seguintes expressões para os resíduos ψ_f e ψ_k :

$$\begin{cases} \psi_k = \left[\sum_{i=1}^{n_k} M_g^{(i)} \right] a \\ \psi_f = \sum_{i=1}^{n_f} P_g^{(i)} \end{cases} \quad (2.80)$$

Para obter explicitamente o termo das cargas hidrostáticas ψ_p , é necessário descrever a área do elemento em função de seus deslocamentos nodais. Considera-se um polígono simples, definido por uma sequência V_p de n vértices no sentido anti-horário:

$$V_p = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & y_{n-1} \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

A área A_p desse polígono corresponde à soma algébrica das áreas trapezoidais dadas por:

$$A_p = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} (x_i + x_{i+1}) (y_{i+1} - y_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \quad (2.82)$$

Os vértices V_e de um elemento de m nós, com vetor de coordenadas b e vetor de deslocamentos a , são dados por:

$$V_e = \begin{bmatrix} b_1 + a_1 & b_2 + a_2 \\ b_3 + a_3 & b_4 + a_4 \\ \vdots & \vdots \\ b_{2m-3} + a_{2m-3} & b_{2m-2} + a_{2m-2} \\ b_{2m-1} + a_{2m-1} & b_{2m} + a_{2m} \\ b_1 + a_1 & b_2 + a_2 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

Considerando os nós dos elementos ordenados apropriadamente (no sentido anti-horário), pode-se substituir esses valores na Equação 2.82, obtendo uma expressão para a área do elemento $A_{\mathbb{X}}$. Sua derivada é dada pelo produto de uma matriz constante F_p pelo vetor de posições nodais atualizadas:

$$\frac{\partial A_{\mathbb{X}}}{\partial a} = F_p (b + a) \quad (2.84)$$

Sendo I_L , I_R e O as seguintes matrizes de dimensões $(2,2)$:

$$\left| \begin{array}{l} I_L = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ I_R = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\ O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.85)$$

A matriz F_p , de dimensões $(2m, 2m)$, é dada por uma concatenação de I_L , I_R e O . Os elementos matriciais à direita da diagonal principal correspondem a I_R , os à esquerda da diagonal principal correspondem a I_L , o primeiro termo da última linha vale I_R e o último termo da primeira linha vale I_L , todos os outros termos correspondem à matriz nula O .

$$F_p = \begin{bmatrix} O & I_R & O & O & \dots & O & I_L \\ I_L & O & I_R & O & \dots & O & O \\ O & I_L & O & I_R & \dots & O & O \\ O & O & I_L & O & \dots & O & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ I_R & O & O & O & \dots & I_L & O \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

Dessa forma, o resíduo ψ_p para um elemento plano, de espessura constante ω , pode ser escrito como:

$$\psi_p = p_c \frac{\partial V_{\mathbb{X}}}{\partial a} = p_c \omega \frac{\partial A_{\mathbb{X}}}{\partial a} = p_c \omega F_p(b+a) \quad (2.87)$$

Os nós do elemento Quad8 não foram numerados no sentido anti-horário pois, neste trabalho, o termo ψ_p é nulo quando se utiliza esse elemento. Em todo caso, para utilizá-lo, bastaria reordenar a matriz de funções de forma N e atualizar os tensores dependentes dela.

Resta apenas descrever como obter o vetor ψ_s , dado pela Equação 2.76. Primeiramente, destacam-se algumas propriedades de alguns dos tensores C , E e T , de ordem 2, correspondentes a matrizes quadradas de valores reais: C , E e T são simétricas; C é definida positiva; C , C^{-1} , E e T são comutativas entre si; todas essas matrizes são de classe \mathcal{C}^1 . Além disso, considera-se um domínio de matrizes C limitadas, no qual existe uma cota superior $m_c \in \mathbb{R}_+^*$ para o conjunto $\{\lambda_C\}$, dos possíveis autovalores de C , ou seja, $m_c \geq \max(\{\lambda_C\})$.

Para facilitar o desenvolvimento da formulação, estabeleçam-se abaixo algumas identidades. Dado um tensor A de ordem 2, correspondente a uma matriz real simétrica e definida positiva, de autovalores $\lambda_a^{(1)}$ e $\lambda_a^{(2)}$:

1. $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\partial A_{ij}^\alpha}{\partial A_{pq}} = \sum_{\beta=1}^{\alpha} A_{ip}^{\beta-1} A_{qj}^{\alpha-\beta}$
2. $\tilde{m} \in \mathbb{R}_+^*$, $\tilde{A} = \frac{1}{\tilde{m}} A \Rightarrow \ln(A) = \ln(\tilde{m})I + \ln(\tilde{A})$
3. $\max(\lambda_a^{(1)}, \lambda_a^{(2)}) < 2 \Rightarrow \ln(A) = - \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} (I - A)^\alpha$
4. $\max(\lambda_a^{(1)}, \lambda_a^{(2)}) < 2 \Rightarrow A^{-1} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} (I - A)^\alpha$
5. $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $A = A^T \Rightarrow A^\alpha = (A^\alpha)^T$
6. $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $A = A^T \Rightarrow A^{-1} = (A^{-1})^T$

Considerando um tensor B de ordem 1, tem-se a identidade:

$$7. \frac{\partial B_i}{\partial B_j} = \delta_{ij}$$

Sendo γ um número qualquer no intervalo $]0, 2]$, define-se \tilde{C} como:

$$\tilde{C} = \frac{\gamma}{m_c} C = \frac{1}{\tilde{m}_c} C \quad (2.88)$$

Tem-se que $\tilde{m}_c = \frac{m_c}{\gamma} > 0$. A matriz \tilde{C} é simétrica; comutativa com C , C^{-1} , E e T ; de classe \mathcal{C}^1 ; e definida positiva, com maior autovalor menor que γ . Define-se então a matriz complementar X :

$$X = I - \tilde{C} \quad (2.89)$$

Esta é simétrica, comutativa com \tilde{C} , C , C^{-1} , E e T , de classe \mathcal{C}^1 e seus autovalores estão no intervalo $] -1, 1[$.

Deseja-se encontrar:

$$T_{mn} \frac{\partial E_{mn}}{\partial a_k} = T_{mn} \frac{\partial E_{mn}}{\partial C_{pq}} \frac{\partial C_{pq}}{\partial a_k} \quad (2.90)$$

Tem-se que:

$$E = \frac{1}{2} \ln(C) = \frac{1}{2} \ln(\tilde{m}_c) I + \frac{1}{2} \ln(\tilde{C}) \quad (2.91)$$

Sabendo que a derivada de uma função definida por uma série de potências pode ser obtida diferenciando a série termo a termo, tem-se, pelas identidades 2 e 3:

$$\begin{aligned} T_{mn} \frac{\partial E_{mn}}{\partial C_{pq}} &= T_{mn} \frac{\partial E_{mn}}{\partial \tilde{C}_{ab}} \frac{\partial \tilde{C}_{ab}}{\partial C_{pq}} = \\ T_{mn} \left[-\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial X_{mn}^{\alpha}}{\partial \tilde{C}_{ab}} \right] \frac{\partial \tilde{C}_{ab}}{\partial C_{pq}} &= T_{mn} \left[-\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{\partial X_{mn}^{\alpha}}{\partial X_{rs}} \frac{\partial X_{rs}}{\partial \tilde{C}_{ab}} \right] \frac{\partial \tilde{C}_{ab}}{\partial C_{pq}} \end{aligned} \quad (2.92)$$

Com a identidade 1:

$$\begin{aligned} T_{mn} \frac{\partial E_{mn}}{\partial C_{pq}} &= T_{mn} \left[-\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{\beta=1}^{\alpha} X_{mr}^{\beta-1} X_{sn}^{\alpha-\beta} \right) (-\delta_{ra} \delta_{bs}) \right] \left(\frac{1}{\tilde{m}_c}, \delta_{ap} \delta_{qb} \right) = \\ T_{mn} \left[\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{\beta=1}^{\alpha} X_{mp}^{\beta-1} X_{qn}^{\alpha-\beta} \right) \right] \frac{1}{\tilde{m}_c} \end{aligned} \quad (2.93)$$

Como X é simétrica, usando a identidade 5:

$$\begin{aligned} T_{mn} \frac{\partial E_{mn}}{\partial C_{pq}} &= T_{mn} \left[\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{\beta=1}^{\alpha} X_{pm}^{\beta-1} X_{nq}^{\alpha-\beta} \right) \right] \frac{1}{\tilde{m}_c} = \\ \left[\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{\beta=1}^{\alpha} X_{pm}^{\beta-1} T_{mn} X_{nq}^{\alpha-\beta} \right) \right] \frac{1}{\tilde{m}_c} \end{aligned} \quad (2.94)$$

Comutando T e X :

$$T_{mn} \frac{\partial E_{mn}}{\partial C_{pq}} = \left[\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{\beta=1}^{\alpha} T_{pm} X_{mn}^{\beta-1} X_{nq}^{\alpha-\beta} \right) \right] \frac{1}{\tilde{m}_c} =$$

$$\left[\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{\beta=1}^{\alpha} T_{pm} X_{mq}^{\alpha-1} \right) \right] \frac{1}{\tilde{m}_c} = \left[\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{\infty} T_{pm} X_{mq}^{\alpha-1} \right] \frac{1}{\tilde{m}_c} = \frac{1}{2} T_{pm} \left[\sum_{\alpha=0}^{\infty} X_{mq}^{\alpha} \right] \frac{1}{\tilde{m}_c} \quad (2.95)$$

Pela identidade 4:

$$T_{mn} \frac{\partial E_{mn}}{\partial C_{pq}} = \frac{1}{2} T_{pm} [\tilde{C}_{mq}^{-1}] \frac{1}{\tilde{m}_c} = \frac{1}{2} T_{pm} \left[\frac{1}{\tilde{m}_c} \tilde{C}_{mq}^{-1} \right] = \frac{1}{2} T_{pm} C_{mq}^{-1} \quad (2.96)$$

Tem-se que:

$$C = F^T F = (I + \nabla u)^T (I + \nabla u) = (I + G)(I + G^T) = I + G + G^T + G G^T =$$

$$I + D \cdot a + (D \cdot a)^T + (D \cdot a)(D \cdot a)^T \quad (2.97)$$

Portanto:

$$\frac{\partial C_{pq}}{\partial a_k} = D_{pqt} \frac{\partial a_t}{\partial a_k} + D_{qpt} \frac{\partial a_t}{\partial a_k} + D_{ptr} \frac{\partial a_r}{\partial a_k} D_{qts} a_s + D_{ptr} a_r D_{qts} \frac{\partial a_s}{\partial a_k} \quad (2.98)$$

Usando a identidade 7:

$$\frac{\partial C_{pq}}{\partial a_k} = D_{pqt} \delta_{tk} + D_{qpt} \delta_{tk} + D_{ptr} \delta_{rk} D_{qts} a_s + D_{ptr} a_r D_{qts} \delta_{sk} =$$

$$D_{pqk} + D_{qpk} + D_{ptk} D_{qts} a_s + D_{ptr} a_r D_{qtk} \quad (2.99)$$

Enfim, obtém-se:

$$T_{mn} \frac{\partial E_{mn}}{\partial C_{pq}} \frac{\partial C_{pq}}{\partial a_k} = \frac{1}{2} T_{pm} C_{mq}^{-1} (D_{pqk} + D_{qpk} + D_{ptk} D_{qts} a_s + D_{ptr} a_r D_{qtk}) \quad (2.100)$$

Desenvolvendo a expressão, levando em conta a comutatividade entre T e C^{-1} e

usando a identidade 6:

$$\begin{aligned}
T_{mn} \frac{\partial E_{mn}}{\partial C_{pq}} \frac{\partial C_{pq}}{\partial a_k} &= T_{pm} C_{mq}^{-1} (D_{pqk} + D_{qts} a_s D_{ptk}) = \\
T_{pm} C_{mq}^{-1} (P_{pz} Q_{zqk} + G_{qt} P_{pz} Q_{ztk}) &= P_{zp}^T T_{pm} C_{mq}^{-1} (Q_{zqk} + G_{qt} Q_{ztk}) = \\
P_{zp}^T T_{pm} C_{mq}^{-1} (\delta_{qt} Q_{ztk} + G_{qt} Q_{ztk}) &= P_{zp}^T T_{pm} C_{mq}^{-1} (\delta_{qt} + G_{qt}) Q_{ztk} = \\
P_{zp}^T T_{pm} C_{mq}^{-1} F_{qt}^T Q_{ztk}
\end{aligned} \tag{2.101}$$

Definindo a matriz $\tilde{\psi}_s$ como:

$$\tilde{\psi}_s = \int_{\mathbb{X}_0} P^T T C^{-1} F^T dV_0 \tag{2.102}$$

Tem-se que o resíduo ψ_s é simplesmente a vetorização de $\tilde{\psi}_s$ através do tensor Q :

$$\psi_s = \tilde{\psi}_s : Q \tag{2.103}$$

Dado um elemento plano, de espessura ω constante, posições nodais \tilde{b} e deslocamentos nodais \tilde{a} fixos, as matrizes P , T , C e F dependem somente da matriz B (Equação 2.65), composta por funções polinomiais da posição ξ no espaço parametrizado. Dessa forma, para realizar a integração volumétrica no elemento, faz-se a mudança de variáveis:

$$\begin{aligned}
\tilde{\psi}_s &= \int_{\mathbb{X}_0} P^T T C^{-1} F^T dV_{\mathbb{X}_0} = \\
\omega \int_{\mathbb{X}_0} P^T T C^{-1} F^T dA_{\mathbb{X}_0} &= \\
\omega \int_{\mathbb{E}} P^T T C^{-1} F^T |\det(J_s)| dA_{\mathbb{E}}
\end{aligned} \tag{2.104}$$

Para dar mais generalidade ao algoritmo e eliminar a necessidade de integrar analiticamente a expressão da Equação 2.104, utiliza-se uma aproximação para a matriz de resíduo estrutural $\tilde{\psi}$, obtida numericamente pela quadratura de Gauss. Este método de integração utiliza-se da simetria do domínio parametrizado $[-1, 1]$ para integrar um polinômio $p(x)$ de ordem $(2n_g - 1)$ fazendo-se o somatório de n_g valores ponderados de p :

$$\int_{-1}^1 p(x) dx = \sum_{i=1}^{n_g} \bar{w}_i p(\bar{x}_i) \tag{2.105}$$

Tanto os pontos \bar{x}_i quanto seus pesos \bar{w}_i são dados conhecidos: os pontos \bar{x}_i correspondem às raízes do polinômio de Legendre de grau n_g (COOK *et al.*, 2002); e os pesos \bar{w}_i

podem ser diretamente obtidos através da Equação 2.105. Generalizando para um polinômio bidimensional $p(x, y)$, cuja maior potência de x ou de y não ultrapassa $(2n_g - 1)$:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 p(x, y) dx dy = \sum_{j=1}^{n_g} \sum_{i=1}^{n_g} \bar{w}_i \bar{w}_j p(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \quad (2.106)$$

Para um dado vetor de deslocamentos nodais, considera-se a matriz Y_ψ , composta por funções de (ξ_1, ξ_2) :

$$Y_\psi = P^T T C^{-1} F^T |\det(J_s)| \quad (2.107)$$

Assumindo que, no domínio \mathbb{E} , existe uma matriz Y_p de polinômios de grau $(2n_g - 1)$ capaz de representar Y_ψ a menos de um erro suficientemente pequeno Y_r , tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{E}} Y_\psi dA_{\mathbb{E}} &= \int_{\mathbb{E}} Y_p dA_{\mathbb{E}} + \int_{\mathbb{E}} Y_r dA_{\mathbb{E}} = \\ &= \sum_{j=1}^{n_g} \sum_{i=1}^{n_g} \bar{w}_i \bar{w}_j Y_p(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \int_{\mathbb{E}} Y_r dA_{\mathbb{E}} = \\ &= \sum_{j=1}^{n_g} \sum_{i=1}^{n_g} \bar{w}_i \bar{w}_j Y_\psi(\bar{x}_i, \bar{x}_j) - \sum_{j=1}^{n_g} \sum_{i=1}^{n_g} \bar{w}_i \bar{w}_j Y_r(\bar{x}_i, \bar{x}_j) + \int_{\mathbb{E}} Y_r dA_{\mathbb{E}} \approx \\ &= \sum_{j=1}^{n_g} \sum_{i=1}^{n_g} \bar{w}_i \bar{w}_j Y_\psi(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \end{aligned} \quad (2.108)$$

Enfim, selecionando um valor n_g apropriado para a quadratura, o resíduo estrutural pode ser obtido numericamente unindo a Equação 2.102, Equação 2.103, Equação 2.104 e Equação 2.108:

$$\psi_s \approx \left(\omega \sum_{j=1}^{n_g} \sum_{i=1}^{n_g} \bar{w}_i \bar{w}_j Y_\psi(\bar{x}_i, \bar{x}_j) \right) : Q \quad (2.109)$$

Destaca-se que o vetor resíduo tem a mesma dimensão que a , assim, pode-se entender o vetor resultante de cada parcela como cargas nodais equivalentes. A equação de equilíbrio iguala, em cada nó do elemento, as cargas equivalentes dos esforços internos às dos esforços externos.

Separa-se ψ_f em ψ_i , referente às cargas aplicadas no elemento pelo restante da estrutura, e ψ_o , referente às cargas de fontes externas.

Dessa forma, a Equação 2.77 torna-se:

$$\psi = \psi_s + \psi_k - \psi_p - \psi_i - \psi_o = 0 \quad (2.110)$$

Resta agora descrever o método de resolução do sistema, que obtém o vetor de deslocamentos nodais da estrutura que satisfaz esse equilíbrio simultaneamente para todos os seus elementos.

2.4.2 Resolução da Microescala

Utiliza-se, a partir daqui, o subscrito (\cdot_e) para identificar que determinado vetor ou matriz é referente a um elemento de índice e e o sobrescrito (\cdot^G) para indicar vetores e matrizes do sistema global. O símbolo (\cdot) é usado para explicitar quando a microescala estiver sendo considerada.

Primeiramente, realiza-se uma operação de *assembly* para unir o conjunto de equações elementares em uma equação de equilíbrio global. O vetor resíduo global $\check{\Psi}^G$ de dimensão $2\check{m}^G$, sendo \check{m}^G o número de nós da estrutura discretizada, é dado pela soma dos vetores aumentados $\check{\Psi}_e^A$. Cada termo de $\check{\Psi}_e$ corresponde a um grau de liberdade do sistema e representa um esforço nodal, horizontal ou vertical. Sendo \check{g}_e uma linha de $\check{\Psi}_e$ (grau de liberdade local) e \check{g}_e^A a linha de $\check{\Psi}^G$ (grau de liberdade global) correspondente, o vetor resíduo aumentado $\check{\Psi}_e^A$ pode ser construído através de uma operação linear definida pela seguinte matriz, de dimensões $(2\check{m}^G, 2\check{m})$, onde \check{m} é o número de nós do elemento utilizado:

$$(\check{W}_e)_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ se } (i, j) \text{ corresponde a um par } (\check{g}_e^A, \check{g}_e) \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (2.111)$$

Tem-se que:

$$\begin{cases} \check{\Psi}_e^A = \check{W}_e \check{\Psi}_e \\ \check{\Psi}_e = \check{W}_e^T \check{\Psi}_e^A \end{cases} \quad (2.112)$$

A matriz \check{W}_e também pode ser utilizada para extrair o vetor de deslocamentos do elemento \check{a}_e do vetor de deslocamentos globais \check{a}^G ; o mesmo pode ser feito para os vetores de coordenadas nodais \check{b}_e e \check{b}^G :

$$\begin{cases} \check{a}_e = \check{W}_e^T \check{a}^G \\ \check{b}_e = \check{W}_e^T \check{b}^G \end{cases} \quad (2.113)$$

O vetor resíduo global é dado por:

$$\begin{aligned} \check{\Psi}^G &= \sum_e \check{\Psi}_e^A = \sum_e \check{W}_e \check{\Psi}_e = \\ \sum_e \check{W}_e (\check{\Psi}_s)_e &+ \sum_e \check{W}_e (\check{\Psi}_k)_e - \sum_e \check{W}_e (\check{\Psi}_p)_e - \sum_e \check{W}_e (\check{\Psi}_i)_e - \sum_e \check{W}_e (\check{\Psi}_o)_e = 0 \end{aligned} \quad (2.114)$$

Alguns desses termos podem ser simplificados. Pela Equação 2.80 e Equação 2.113 tem-se:

$$\sum_e \check{W}_e (\check{\psi}_k)_e = \left[\sum_e \sum_{i=1}^{(n_k)_e} \check{W}_e \left(\check{M}_g^{(i)} \right)_e \check{W}_e^T \right] \check{a}^G = \check{M}_g^G \check{a}^G \quad (2.115)$$

Cada matriz $\left(\check{M}_g^{(i)} \right)_e$ corresponde a uma parcela da rigidez de uma mola que atua sobre um grau de liberdade presente no elemento e ; ao somar todas as matrizes aumentadas, obtém-se, em cada grau de liberdade, o valor total de rigidez das molas aplicadas na estrutura global.

Considerando que todos os elementos tem a mesma espessura $\check{\omega}$, pela Equação 2.87 e Equação 2.113 tem-se:

$$\sum_e \check{W}_e (\check{\psi}_p)_e = \check{\omega} \left[\sum_e (\check{p}_c)_e \check{W}_e (\check{F}_p)_e \check{W}_e^T \right] (\check{b}^G + \check{a}^G) \quad (2.116)$$

Apesar de $(\check{\psi}_i)_e$ corresponder a um esforço externo ao elemento, no referencial global esses vetores correspondem a cargas internas que um elemento aplica sobre o outro. Pela terceira lei de Newton, o somatório desses vetores aumentados deve ser necessariamente nulo:

$$\sum_e \check{W}_e (\check{\psi}_i)_e = 0 \quad (2.117)$$

Dividindo cada vetor $(\check{\psi}_o)_e$ em um termo referente a cargas aplicadas à estrutura global, $\left(\check{P}_a^{(i)} \right)_e$, e um termo referente a cargas aplicadas sobre os elementos, $\left(\check{P}_b^{(i)} \right)_e$, tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_e W_e (\psi_o)_e &= \sum_e \sum_{i=1}^{(n_f)_e} \check{W}_e \left(\check{P}_a^{(i)} \right)_e + \sum_e \sum_{i=1}^{(n_f)_e} \check{W}_e \left(\check{P}_b^{(i)} \right)_e = \\ &\check{P}_a^G + \sum_e \sum_{i=1}^{(n_f)_e} \check{W}_e \left(\check{P}_b^{(i)} \right)_e \end{aligned} \quad (2.118)$$

Assim como para as molas, ao somar todos os termos $\left(\check{P}_a^{(i)} \right)_e$ aumentados, as cargas externas aplicadas aos nós da estrutura ficam explícitas no vetor global \check{P}_a^G . Por sua vez, os termos $\left(\check{P}_b^{(i)} \right)_e$ serão relevantes apenas na análise multiescala posterior, na qual cada elemento possui um carregamento próprio que representa as forças hidrostáticas atuando no interior das células.

Dessa maneira, o resíduo global pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \check{\psi}^G &= \sum_e \check{W}_e (\check{\psi}_s)_e + \check{M}_g^G \check{a}^G \\ -\check{\omega} \left[\sum_e (\check{p}_c)_e \check{W}_e (\check{F}_p)_e \check{W}_e^T \right] (\check{b}^G + \check{a}^G) - \check{P}_a^G - \sum_e \sum_{i=1}^{(n_f)_e} \check{W}_e \left(\check{P}_b^{(i)} \right)_e &= 0 \end{aligned} \quad (2.119)$$

Para solucionar esse sistema de equações não-lineares utilizou-se o método de Newton-Raphson (NETO *et al.*, 2011). Este método numérico mostrou-se adequado para os casos tratados, convergindo em poucas iterações. Contudo, em casos com carregamentos muito elevados, é preciso aplicar a carga gradualmente para garantir a convergência do método.

Nesse método, busca-se um vetor \check{a}_s^G que anula (a menos de uma tolerância) a função $\check{\Psi}^G$; assume-se um bom comportamento para a função e parte-se de um ponto \check{a}_0^G conhecido. A cada iteração, espera-se que o método retorne um ponto mais próximo a um zero de $\check{\Psi}^G$; o processo é repetido até que se atinja um critério de parada como o apresentado na Equação 2.120, na qual ε_f é um valor pequeno (10^{-5} por exemplo), previamente especificado.

$$\frac{\|\check{\Psi}^G(\check{a}_i^G)\|}{\|\check{\Psi}^G(\check{a}_0^G)\|} < \varepsilon_f \Rightarrow \check{a}_s^G = \check{a}_i^G \quad (2.120)$$

A atualização do vetor de deslocamentos é feita impondo com que o ponto \check{a}_{i+1}^G anule a função linearizada em \check{a}_i^G , conforme apresentado na Equação 2.121.

$$\check{a}_{i+1}^G = \check{a}_i^G - \left[\frac{\partial \check{\Psi}^G}{\partial \check{a}^G}(\check{a}_i^G) \right]^{-1} \check{\Psi}^G(\check{a}_i^G), \quad i \in \mathbb{N} \quad (2.121)$$

Dessa forma, o problema não-linear simplifica-se numa sequência de problemas lineares. A matriz das derivadas de $\check{\Psi}^G$ com respeito a \check{a}^G é chamada de matriz tangente \check{K}^G . Ela possui um termo \check{K}_s correspondente à rigidez estrutural; um termo \check{K}_k correspondente às molas; um termo \check{K}_p correspondente ao carregamento hidrostático; um termo \check{K}_a para o carregamento externo aplicado na estrutura; e um termo \check{K}_b para o carregamento externo aplicado nos elementos:

$$\left| \begin{array}{lcl} (\check{K}_s)_e & = & \frac{\partial (\check{\Psi}_s)_e}{\partial \check{a}_e} \\ \check{K}_k^G & = & \check{M}_g^G \\ (\check{K}_p)_e & = & \check{\omega}(\check{p}_c)_e(\check{F}_p)_e \\ \check{K}_a^G & = & \frac{\partial \check{P}_a^G}{\partial \check{a}^G} \\ (\check{K}_b)_e & = & \sum_{i=1}^{(n_f)_e} \frac{\partial (\check{P}_b^{(i)})_e}{\partial \check{a}_e} \end{array} \right. \quad (2.122)$$

Usando a Equação 2.119 e a Equação 2.122, tem-se:

$$\check{K}^G = \frac{\partial \check{\Psi}^G}{\partial \check{a}^G} = \sum_e \check{W}_e (\check{K}_s)_e \check{W}_e^T + \check{K}_k^G - \sum_e \check{W}_e (\check{K}_p)_e \check{W}_e^T - \check{K}_a^G - \sum_e \check{W}_e (\check{K}_b)_e \check{W}_e^T \quad (2.123)$$

Deseja-se obter a matriz $(\check{K}_s)_e$ dada por:

$$(\check{K}_s)_e = \frac{\partial(\check{\Psi}_s)_e}{\partial \check{a}_e} = \frac{\partial(\check{\Psi}_s)_e : \mathcal{Q}}{\partial \check{a}_e} \quad (2.124)$$

Para isso, é necessário realizar a seguinte diferenciação:

$$\frac{\partial(P^T T C^{-1} F^T)}{\partial \check{a}_e} = P^T \left(\frac{\partial T}{\partial \check{a}_e} C^{-1} F^T + T \frac{\partial C^{-1}}{\partial \check{a}_e} F^T + T C^{-1} \frac{\partial F^T}{\partial \check{a}_e} \right) \quad (2.125)$$

Somadas às propriedades e identidades descritas na subseção anterior, aqui mais algumas identidades são estabelecidas. Sendo A um tensor de ordem 2 e dimensões $(2, 2)$, correspondente a uma matriz real simétrica e definida positiva, de autovalores $\{\lambda_a^{(1)}, \lambda_a^{(2)}\}$, com $\lambda_a^{(1)} \geq \lambda_a^{(2)} > 0$; D_A a diagonalização de A através da matriz de autovetores ortonormais V_A ; e ζ uma função suficientemente regular, tem-se:

8. $t = \text{tr}(A)$, $d = \det(A)$, $q = \sqrt{t^2 - 4d} \Rightarrow \lambda_a^{(1)} = \frac{t+q}{2}$, $\lambda_a^{(2)} = \frac{t-q}{2}$
9. $t = \lambda_a^{(1)} + \lambda_a^{(2)}$, $d = \lambda_a^{(1)} \lambda_a^{(2)}$, $q = \lambda_a^{(1)} - \lambda_a^{(2)}$
10. $\frac{\partial t}{\partial A_{pq}} = \delta_{pq}$
11. $\frac{\partial d}{\partial A_{pq}} = t \delta_{pq} - A_{pq}$
12. $\frac{\partial A_{ij}^{-1}}{\partial A_{pq}} = -A_{ip}^{-1} A_{qj}^{-1}$
13. $\left| \begin{array}{l} \lambda_a^{(1)} > \lambda_a^{(2)}, f_I = \frac{\lambda_a^{(1)} \zeta(\lambda_a^{(2)}) - \lambda_a^{(2)} \zeta(\lambda_a^{(1)})}{\lambda_a^{(1)} - \lambda_a^{(2)}}, f_A = \frac{\zeta(\lambda_a^{(1)}) - \zeta(\lambda_a^{(2)})}{\lambda_a^{(1)} - \lambda_a^{(2)}} \Rightarrow \\ \zeta(A) = V_A \zeta(D_A) V_A^T = \frac{\zeta(\lambda_a^{(1)})}{\lambda_a^{(1)} - \lambda_a^{(2)}} (A - \lambda_a^{(2)} I) + \frac{\zeta(\lambda_a^{(2)})}{\lambda_a^{(2)} - \lambda_a^{(1)}} (A - \lambda_a^{(1)} I) = f_I I + f_A A \end{array} \right.$

Como apresentado na Equação 2.125, é preciso obter as derivadas de T , C^{-1} e F^T , com respeito ao vetor \check{a}_e . A derivada de T é dada por:

$$\frac{\partial T_{bc}}{\partial (\check{a}_e)_k} = \frac{\partial T_{bc}}{\partial E_{mn}} \frac{\partial E_{mn}}{\partial C_{pq}} \frac{\partial C_{pq}}{\partial (\check{a}_e)_k} \quad (2.126)$$

Usando a identidade 10, tem-se que:

$$\begin{aligned} T &= \lambda_t \text{tr}(E) I + 2 \mu_t E \Rightarrow \\ \frac{\partial T_{bc}}{\partial E_{mn}} &= \lambda_t \delta_{mn} \delta_{bc} + 2 \mu_t \delta_{bm} \delta_{nc} \end{aligned} \quad (2.127)$$

Sendo $\lambda_c^{(1)} > \lambda_c^{(2)} > 0$ os autovalores de C , definem-se as matrizes L_1 e L_2 como:

$$\left| \begin{array}{l} L_1 = \frac{1}{\lambda_c^{(1)} - \lambda_c^{(2)}} (C - \lambda_c^{(2)} I) \\ L_2 = \frac{1}{\lambda_c^{(2)} - \lambda_c^{(1)}} (C - \lambda_c^{(1)} I) \end{array} \right. \quad (2.128)$$

E os escalares f_I e f_C como:

$$\left| \begin{array}{l} f_I = \frac{\lambda_c^{(1)} \ln(\lambda_c^{(2)}) - \lambda_c^{(2)} \ln(\lambda_c^{(1)})}{\lambda_c^{(1)} - \lambda_c^{(2)}} \\ f_C = \frac{\ln(\lambda_c^{(1)}) - \ln(\lambda_c^{(2)})}{\lambda_c^{(1)} - \lambda_c^{(2)}} \end{array} \right. \quad (2.129)$$

Pela identidade 13 tem-se que:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \ln(C) = \frac{1}{2} (f_I I + f_C C) \Rightarrow \\ \frac{\partial E_{mn}}{\partial C_{pq}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_I}{\partial C_{pq}} \delta_{mn} + \frac{\partial f_C}{\partial C_{pq}} C_{mn} + f_C \frac{\partial C_{mn}}{\partial C_{pq}} \right) \end{aligned} \quad (2.130)$$

A derivada de C é dada pela identidade 1. As derivadas de f_I e f_C podem ser escritas como:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial f_I}{\partial C_{pq}} = \frac{\partial f_I}{\partial \lambda_c^{(1)}} \frac{\partial \lambda_c^{(1)}}{\partial C_{pq}} + \frac{\partial f_I}{\partial \lambda_c^{(2)}} \frac{\partial \lambda_c^{(2)}}{\partial C_{pq}} \\ \frac{\partial f_C}{\partial C_{pq}} = \frac{\partial f_C}{\partial \lambda_c^{(1)}} \frac{\partial \lambda_c^{(1)}}{\partial C_{pq}} + \frac{\partial f_C}{\partial \lambda_c^{(2)}} \frac{\partial \lambda_c^{(2)}}{\partial C_{pq}} \end{array} \right. \quad (2.131)$$

Onde:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial f_I}{\partial \lambda_c^{(1)}} = \frac{\lambda_c^{(1)} \lambda_c^{(2)} (\ln(\lambda_c^{(1)}) - \ln(\lambda_c^{(2)})) - \lambda_c^{(2)} (\lambda_c^{(1)} - \lambda_c^{(2)})}{\lambda_c^{(1)} (\lambda_c^{(1)} - \lambda_c^{(2)})^2} \\ \frac{\partial f_I}{\partial \lambda_c^{(2)}} = \frac{\lambda_c^{(2)} \lambda_c^{(1)} (\ln(\lambda_c^{(2)}) - \ln(\lambda_c^{(1)})) - \lambda_c^{(1)} (\lambda_c^{(2)} - \lambda_c^{(1)})}{\lambda_c^{(2)} (\lambda_c^{(2)} - \lambda_c^{(1)})^2} \\ \frac{\partial f_C}{\partial \lambda_c^{(1)}} = \frac{\lambda_c^{(1)} (\ln(\lambda_c^{(2)}) - \ln(\lambda_c^{(1)})) - (\lambda_c^{(2)} - \lambda_c^{(1)})}{\lambda_c^{(1)} (\lambda_c^{(1)} - \lambda_c^{(2)})^2} \\ \frac{\partial f_C}{\partial \lambda_c^{(2)}} = \frac{\lambda_c^{(2)} (\ln(\lambda_c^{(1)}) - \ln(\lambda_c^{(2)})) - (\lambda_c^{(1)} - \lambda_c^{(2)})}{\lambda_c^{(2)} (\lambda_c^{(2)} - \lambda_c^{(1)})^2} \end{array} \right. \quad (2.132)$$

Usando as identidades 8, 9, 10 e 11, tem-se que:

$$\left| \begin{aligned} \frac{\partial \lambda_c^{(1)}}{\partial C_{pq}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial t}{\partial C_{pq}} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial C_{pq}} + \frac{\partial q}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial C_{pq}} \right) = \\ &\quad \frac{1}{q} \left(C_{pq} - \left(\frac{t-q}{2} \right) \delta_{pq} \right) = (L_1)_{pq} \\ \frac{\partial \lambda_c^{(2)}}{\partial C_{pq}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial t}{\partial C_{pq}} - \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial C_{pq}} - \frac{\partial q}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial C_{pq}} \right) = \\ &\quad - \frac{1}{q} \left(C_{pq} - \left(\frac{t+q}{2} \right) \delta_{pq} \right) = (L_2)_{pq} \end{aligned} \right. \quad (2.133)$$

Combinando a Equação 2.130, Equação 2.131, Equação 2.132 e Equação 2.133, chega-se em:

$$\frac{\partial E_{mn}}{\partial C_{pq}} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\lambda_c^{(1)}} - f_C \right) (L_1)_{pq} (L_1)_{mn} + \left(\frac{1}{\lambda_c^{(2)}} - f_C \right) (L_2)_{pq} (L_2)_{mn} + f_C \delta_{mp} \delta_{qn} \right] \quad (2.134)$$

Definem-se as seguintes matrizes:

$$\left| \begin{aligned} L_f &= \left(\frac{1}{\lambda_c^{(1)}} - f_C \right) L_1 + \left(\frac{1}{\lambda_c^{(2)}} - f_C \right) L_2 + f_C I \\ H_1 &= P^T L_1 F^T \\ H_2 &= P^T L_2 F^T \\ H_f &= P^T L_f F^T \end{aligned} \right. \quad (2.135)$$

Usando a Equação 2.99, Equação 2.127, Equação 2.134 e Equação 2.135, a Equação 2.126 torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{bc}}{\partial (\check{a}_e)_k} &= \lambda_t (H_f)_{rs} Q_{rsk} \delta_{bc} + \mu_t f_C (D_{btk} F_{tc} + D_{ctk} F_{tb}) \\ + 2\mu_t &\left[\left(\frac{1}{\lambda_c^{(1)}} - f_C \right) (H_1)_{rs} Q_{rsk} (L_1)_{bc} + \left(\frac{1}{\lambda_c^{(2)}} - f_C \right) (H_2)_{rs} Q_{rsk} (L_2)_{bc} \right] \end{aligned} \quad (2.136)$$

Por sua vez, a derivada de C^{-1} é dada por:

$$\frac{\partial C_{cd}^{-1}}{\partial (\check{a}_e)_k} = \frac{\partial C_{cd}^{-1}}{\partial C_{pq}} \frac{\partial C_{pq}}{\partial (\check{a}_e)_k} \quad (2.137)$$

Pela identidade 12 e Equação 2.99, tem-se:

$$\frac{\partial C_{cd}^{-1}}{\partial (\check{a}_e)_k} = -(C_{cr}^{-1} D_{rtk} F_{tw} C_{wd}^{-1} + C_{dr}^{-1} D_{rtk} F_{tw} C_{wc}^{-1}) \quad (2.138)$$

Quanto à derivada de F^T , ela é dada simplesmente por:

$$\frac{\partial F_{de}^T}{\partial (\check{a}_e)_k} = D_{dek} \quad (2.139)$$

Definem-se mais algumas matrizes:

$$\left| \begin{array}{l} Z_f = \lambda_t (P^T C^{-1} F^T) \\ Z_1 = \left(2\mu_t \left(\frac{1}{\lambda_c^{(1)}} - f_C \right) \right) (P^T L_1, C^{-1} F^T) \\ Z_2 = \left(2\mu_t \left(\frac{1}{\lambda_c^{(2)}} - f_C \right) \right) (P^T L_2, C^{-1} F^T) \\ Z_d = (\mu_t f_C) I - T C^{-1} \\ X_1 = P^T Z_d P \\ X_2 = P^T Z_d F^T \\ Y_1 = F C^{-1} F^T \\ Y_2 = P^T C^{-1} F^T \\ W_0 = P^T T C^{-1} P \end{array} \right. \quad (2.140)$$

Finalmente, juntado a Equação 2.136, Equação 2.138, Equação 2.139, Equação 2.125 e Equação 2.140, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (P_{ab}^T T_{bc} C_{cd}^{-1} F_{de}^T)}{\partial (\check{a}_e)_k} = \\ (H_f)_{rs} Q_{rsk} (Z_f)_{ae} + (H_1)_{rs} Q_{rsk} (Z_1)_{ae} + (H_2)_{rs} Q_{rsk} (Z_2)_{ae} \\ + (X_1)_{ar} Q_{rsk} (Y_1)_{se} + (X_2)_{as} Q_{rsk} (Y_2)_{re} + (W_0)_{at} Q_{tek} \end{aligned} \quad (2.141)$$

Considerando as seguintes vetorizações:

$$\left| \begin{array}{l} h_f = H_f : Q \\ h_1 = H_1 : Q \\ h_2 = H_2 : Q \\ z_f = Z_f : Q \\ z_1 = Z_1 : Q \\ z_2 = Z_2 : Q \end{array} \right. \quad (2.142)$$

Definem-se as matrizes:

$$\left| \begin{array}{l} S_f = z_f h_f^T \\ S_1 = z_1 h_1^T \\ S_2 = z_2 h_2^T \\ S_q = S_f + S_1 + S_2 \end{array} \right. \quad (2.143)$$

Assim, tem-se:

$$\begin{aligned} Y_k &= \frac{\partial (P^T T C^{-1} F^T) : Q}{\partial \check{a}_e} \Rightarrow \\ (Y_k)_{ij} &= (H_f)_{rs} Q_{rsj} (Z_f)_{ae} Q_{aei} + (H_1)_{rs} Q_{rsj} (Z_1)_{ae} Q_{aei} \\ &+ (H_2)_{rs} Q_{rsj} (Z_2)_{ae} Q_{aei} + (X_1)_{ar} Q_{rsj} (Y_1)_{se} Q_{aei} \\ &+ (X_2)_{as} Q_{rsj} (Y_2)_{re} Q_{aei} + (W_0)_{at} Q_{tej} Q_{aei} = \\ (S_q)_{ij} &+ (X_1)_{ar} Q_{rsj} (Y_1)_{se} Q_{aei} + (X_2)_{as} Q_{rsj} (Y_2)_{re} Q_{aei} + (W_0)_{at} Q_{tej} Q_{aei} \end{aligned} \quad (2.144)$$

Definem-se as matrizes retangulares R_1 e R_2 , de \check{m} linhas e $2\check{m}$ colunas, como:

$$\left| \begin{array}{l} (R_1)_{ij} = \delta_{(2i-1)j} \\ (R_2)_{ij} = \delta_{(2i)j} \end{array} \right. \quad (2.145)$$

Com elas, constrói-se W_q :

$$\left| \begin{array}{l} W_1 = R_1^T W_0 R_1 \\ W_2 = R_2^T W_0 R_2 \\ W_q = W_1 + W_2 \end{array} \right. \quad (2.146)$$

Define-se a matriz V_q^A como:

$$\left| \begin{array}{l} e_1 = \{1, 0\}^T \\ e_2 = \{0, 1\}^T \\ U_1^A = R_1^T X_1 R_1 \\ U_2^A = R_1^T X_1 R_2 \\ U_3^A = R_2^T X_1 R_1 \\ U_4^A = R_2^T X_1 R_2 \\ V_1^A = (e_1^T Y_1 e_1) U_1^A \\ V_2^A = (e_2^T Y_1 e_1) U_2^A \\ V_3^A = (e_1^T Y_1 e_2) U_3^A \\ V_4^A = (e_2^T Y_1 e_2) U_4^A \\ V_q^A = \sum_{\alpha=1}^4 V_\alpha^A \end{array} \right. \quad (2.147)$$

Definem-se os vetores canônicos de dimensão \check{m} :

$$\left| \begin{array}{l} g_1 = \{1, 0, \dots, 0\}^T \\ g_2 = \{0, 1, \dots, 0\}^T \\ \vdots \\ g_m = \{0, 0, \dots, 1\}^T \end{array} \right. \quad (2.148)$$

E as matrizes com $2m$ colunas:

$$\left| \begin{array}{l} J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ J_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.149)$$

Com elas, definem-se as matrizes U_*^B :

$$\left| \begin{array}{l} U_1^B = R_1^T X_2 J_1 \\ U_2^B = R_2^T X_2 J_1 \\ U_3^B = R_1^T X_2 J_2 \\ U_4^B = R_2^T X_2 J_2 \\ \vdots \\ U_{2m-1}^B = R_1^T X_2 J_m \\ U_{2m}^B = R_2^T X_2 J_m \end{array} \right. \quad (2.150)$$

E então as matrizes V_*^B :

$$\left| \begin{array}{l} V_1^B = (g_1^T Y_2 e_1) U_1^B \\ V_2^B = (g_1^T Y_2 e_2) U_2^B \\ V_3^B = (g_2^T Y_2 e_1) U_3^B \\ V_4^B = (g_2^T Y_2 e_2) U_4^B \\ \vdots \\ V_{2m-1}^B = (g_m^T Y_2 e_1) U_{2m-1}^B \\ V_{2m}^B = (g_m^T Y_2 e_2) U_{2m}^B \end{array} \right. \quad (2.151)$$

Assim, constrói-se V_q :

$$\left| \begin{array}{l} V_q^B = \sum_{\alpha=1}^{2m} V_\alpha^B \\ V_q = V_q^A + V_q^B \end{array} \right. \quad (2.152)$$

Tem-se que:

$$Q_{tej} Q_{aei} = \delta_{(2t-1)j} \delta_{(2a-1)i} + \delta_{(2t)j} \delta_{(2a)i} \quad (2.153)$$

Por sua vez:

$$\left| \begin{array}{l} (X_1)_{ar} Q_{rsj} (Y_1)_{se} Q_{aei} = (V_q^A)_{ij} \\ (X_2)_{as} Q_{rsj} (Y_2)_{re} Q_{aei} = (V_q^B)_{ij} \end{array} \right. \quad (2.154)$$

Com isso, a matriz Y_k se torna

$$(Y_k)_{ij} = (S_q)_{ij} + (V_q)_{ij} + (W_q)_{ij} \Rightarrow Y_k = S_q + V_q + W_q \quad (2.155)$$

Retomando a Equação 2.124:

$$(K_s)_e = \frac{\partial \tilde{\Psi}_s : Q}{\partial \check{a}_e} = \int_{\mathbb{X}_0} \frac{\partial P^T T C^{-1} F^T : Q}{\partial \check{a}_e} dV_{\mathbb{X}_0} = \int_{\mathbb{X}_0} Y_k dV_{\mathbb{X}_0} \quad (2.156)$$

É fácil observar que a componente W_q é simétrica. Contudo, os outros dois termos, S_q e V_q , são de difícil avaliação. Dessa forma, afirma-se que Y_k é simétrica pelo fato de ela corresponder à matriz hessiana de uma função suficientemente regular:

$$\left| \begin{array}{l} \Psi = \frac{1}{2} T : E \\ Y_k = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial (\check{a}_e)^2} \Leftrightarrow (Y_k)_{ij} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial (\check{a}_e)_i \partial (\check{a}_e)_j} \end{array} \right. \quad (2.157)$$

Finalizando, resta discutir sobre o caso particular em que os autovalores são idênticos.

Tem-se pela identidade 13:

$$\left| \begin{array}{l} \ln(C) = f_I I + f_C C = \frac{\lambda_c^{(1)} \ln(\lambda_c^{(2)}) - \lambda_c^{(2)} \ln(\lambda_c^{(1)})}{\lambda_c^{(1)} - \lambda_c^{(2)}} I + \frac{\ln(\lambda_c^{(1)}) - \ln(\lambda_c^{(2)})}{\lambda_c^{(1)} - \lambda_c^{(2)}} C \\ C^{-1} = \frac{\lambda_c^{(1)} + \lambda_c^{(2)}}{\lambda_c^{(1)} \lambda_c^{(2)}} I - \frac{1}{\lambda_c^{(1)} \lambda_c^{(2)}} C = \frac{1}{d} (tI - C) \end{array} \right. \quad (2.158)$$

No caso limite em que $\lambda_c^{(1)} = \lambda_c^{(2)} = \lambda_c > 0$, tem-se:

$$\left| \begin{aligned} f_I &= \lim_{\lambda_c^{(1)} \rightarrow \lambda_c} \frac{\lambda_c^{(1)} \ln(\lambda_c) - \lambda_c \ln(\lambda_c^{(1)})}{\lambda_c^{(1)} - \lambda_c} = \ln(\lambda_c) - 1 \\ f_C &= \lim_{\lambda_c^{(1)} \rightarrow \lambda_c} \frac{\ln(\lambda_c^{(1)}) - \ln(\lambda_c)}{\lambda_c^{(1)} - \lambda_c} = \frac{1}{\lambda_c} \end{aligned} \right. \quad (2.159)$$

As expressões para C e suas funções (logaritmo e inversa) simplificam-se em:

$$\left| \begin{aligned} C &= \lambda_c I \\ \ln(C) &= \ln(\lambda_c) I \\ C^{-1} &= \frac{1}{\lambda_c} I \end{aligned} \right. \quad (2.160)$$

Um ponto delicado são as matrizes L_1 e L_2 . Como C pertence ao espaço de matrizes reais simétricas, tem-se que $C = V_C D_C V_C^T$, onde D_C é a matriz dos autovalores de C e V_C a matriz de seus autovetores ortonormais. Com isso, pode-se reescrever L_1 e L_2 como:

$$\left| \begin{aligned} I_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ I_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ L_1 &= V_C I_1 V_C^T \\ L_2 &= V_C I_2 V_C^T \end{aligned} \right. \quad (2.161)$$

Assim, tem-se que L_1 e L_2 são matrizes limitadas rotacionadas e são, portanto, limitadas. Como essas matrizes apenas aparecem nas formulações multiplicadas por $\left(\frac{1}{\lambda_c^{(1)}} - f_C\right)$ ou $\left(\frac{1}{\lambda_c^{(2)}} - f_C\right)$, termos que vão a 0 quando $\lambda_c^{(1)}$ e $\lambda_c^{(2)}$ tendem ao mesmo valor, os produtos delas por esses coeficientes serão necessariamente nulos nesse caso limite. Portanto, a formulação é a mesma para o caso particular em que C aproxima-se de um múltiplo da identidade I , a menos dos termos onde aparecem as matrizes L_1 e L_2 , que devem ser simplesmente anulados.

Analogamente ao caso do resíduo, para um dado vetor de deslocamentos nodais, $(Y_k)_e$ é função de (ξ_1, ξ_2) e a integral no volume do elemento pode ser feita pela quadratura de Gauss com um valor n_g apropriado, para isso, define-se a matriz $\left(Y_k^\xi\right)_e$ como:

$$\left(Y_k^\xi\right)_e = (Y_k)_e |\det(J_s)| \quad (2.162)$$

De tal forma, a integral é aproximada por:

$$(\check{K}_s)_e \approx \omega \sum_{j=1}^{n_g} \sum_{i=1}^{n_g} w_i w_j \left(Y_k^\xi \right)_e (x_i, x_j) \quad (2.163)$$

Pela expressão de *assembly* (Equação 2.123) obtém-se a matriz \check{K}^G . Entretanto, numa situação em que os termos estruturais são preponderantes para bom condicionamento do problema, tem-se um sistema com infinitas soluções. Uma vez que deslocamentos rígidos não deformam o corpo, qualquer translado de uma solução \check{a}_s^G é também solução. Isso se traduz matematicamente na singularidade da matriz \check{K}^G . Nesse caso, em que \check{K}^G não possui inversa, solução iterativa apresentada na Equação 2.121 não pode ser realizada. Para tornar o problema bem posto, é necessário aplicar-lhe algumas condições de contorno, correspondente às imposições de restrição do sistema físico.

No caso dos atuadores tratados, as restrições serão sempre imposições de deslocamento nulo em determinados graus de liberdade, representando engastes, roletes ou pinos. Neste caso, as colunas de \check{K}^G e as linhas de \check{a}^G correspondentes aos deslocamentos restritos podem ser removidas, já que esses graus de liberdade serão nulos. Além disso, em cada linha correspondente aos deslocamentos restritos, surgirá um termo de resíduo correspondente às cargas externas aplicadas pelos suportes que restringem a estrutura. Como não se deseja conhecer o valor de tais termos nesta etapa e uma vez que eles assumirão o valor necessário para que cada equação correspondente às linhas restritas seja verdadeira, pode-se remover do sistema todas essas equações. Em outras palavras, removem-se as linhas de \check{K}^G e de $\check{\psi}^G$ referentes aos graus de liberdade restritos, eliminando as incógnitas indesejadas (cargas aplicadas pelos suportes) e tornando a matriz quadrada novamente. Ao aplicar uma quantidade suficiente de restrições, a matriz \check{K}^G se torna inversível e o problema pode ser solucionado. Nota-se que todo valor removido de \check{a}^G é conhecido e vale 0; ao solucionar o sistema encontram-se os valores de \check{a}^G em seus graus de liberdade irrestritos.

Sendo n_r o número de graus de liberdade restritos e \mathbb{G} o conjunto desses graus de liberdade, tem-se que a operação de restrição pode ser representada através da matriz retangular R_c de dimensões $(2\check{m} - n_r, 2\check{m})$.

$$(R_c)_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad \text{se } j \notin \mathbb{G} \text{ e } \nexists a < i | (R_c)_{aj} = 1 \text{ e } \nexists b < j | (R_c)_{ib} = 1 \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.164)$$

Tem-se que R_c corresponde à matriz identidade de dimensões $(2m - n_r, 2m - n_r)$ com colunas de zeros concatenadas nas posições correspondentes aos graus de liberdade restritos. Dessa forma, a matriz global restrita \check{K}^R , o vetor resíduo restrito $\check{\psi}^R$ e o vetor de desloca-

mentos nodais restrito \check{a}^R são dados por:

$$\left| \begin{array}{l} \check{K}^R = R_c \check{K}^G R_c^T \\ \check{\psi}^R = R_c \check{\psi}^G \\ \check{a}^R = R_c \check{a}^G \end{array} \right. \quad (2.165)$$

Dessa forma, o vetor de deslocamentos \check{a}_s^R que faz com que a estrutura restrita esteja em equilíbrio estático é obtido iterativamente através da seguinte expressão:

$$\check{a}_{i+1}^R = \check{a}_i^R - (\check{K}^R)^{-1} \check{\psi}^R(\check{a}_i^R), \quad i \in \mathbb{N} \quad (2.166)$$

Para garantir maior estabilidade durante a otimização topológica da estrutura, \check{a}^R é sempre inicializado como um vetor nulo ($\check{a}_0^R = 0$). Neste caso, a primeira iteração do método de Newton-Raphson retorna a solução para o problema linear correspondente, válida quando os carregamentos são pequenos o suficiente para que as hipóteses de pequenos deslocamentos e deformações sejam satisfeitas.

2.4.3 Modelo Multiescala

Utiliza-se, a partir daqui, o símbolo $(\hat{\cdot})$ para explicitar quando a macroescala estiver sendo considerada. Nessa escala, o equilíbrio continua sendo dado pelo balanço da Equação 2.119, mas utilizando os tensores correspondentes à macroestrutura:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}^G &= \sum_e \hat{W}_e (\hat{\psi}_s)_e + \hat{M}_g^G \hat{a}^G \\ -\hat{\omega} \left[\sum_e (\hat{p}_c)_e \hat{W}_e (\hat{F}_p)_e \hat{W}_e^T \right] (\hat{b}^G + \hat{a}^G) - \hat{P}_a^G - \sum_e \sum_{i=1}^{(n_f)_e} \hat{W}_e \left(\hat{P}_b^{(i)} \right)_e &= 0 \end{aligned} \quad (2.167)$$

A resolução do sistema também é feita pelo método de Newton-Raphson e a matriz tangente \hat{K}^G é dada de forma análoga à Equação 2.123:

$$\begin{aligned} \hat{K}^G &= \frac{\partial \hat{\psi}^G}{\partial \hat{a}^G} = \\ \sum_e \hat{W}_e (\hat{K}_s)_e \hat{W}_e^T + \hat{K}_k^G - \sum_e \hat{W}_e (\hat{K}_p)_e \hat{W}_e^T - \hat{K}_a^G - \sum_e \hat{W}_e (\hat{K}_b)_e \hat{W}_e^T \end{aligned} \quad (2.168)$$

Para prosseguir, é necessário distinguir os dois casos a serem considerados. No mais simples, tem-se um atuador não-celular, descrito como microestrutura. Utilizam-se elementos Quad4, quadrados e de mesmo tamanho, que podem ser sólidos ou fluidos; os elementos sólidos possuem módulo de Young E_y^0 e pressão nula, os elementos fluidos possuem módulo de Young nulo e pressão p_c . Nessa análise podem haver molas e cargas pontuais constantes aplicadas à

estrutura, mas desconsidera-se a presença de cargas aplicadas sobre os elementos. Avaliando os termos da Equação 2.122, tem-se que $(\check{K}_s)_e$ e $(\check{K}_p)_e$ dependem do tipo de elemento, mas são termos conhecidos, assim como \check{K}_k^G . Por sua vez, \check{K}_a^G é nulo pois as cargas aplicadas são constantes e $(\check{K}_b)_e$ é nulo por hipótese.

No caso multiescala, a microestrutura de cada célula continua a ser representada dessa mesma forma, adicionando-se as condições de simetria propostas; quanto à macroestrutura, todas as células do atuador são quadradas e de mesmo tamanho e cada uma delas é representada por um único elemento Quad8, com módulo de Young equivalente $E_y^{[.]}$ e pressão nula, o carregamento hidrostático é representado por um vetor de cargas $f_c^{[.]}$. Assim, tem-se para cada macroelemento:

$$\sum_{i=1}^{(n_f)_e} (\hat{p}_b^{(i)})_e = f_c^{[.]} \quad (2.169)$$

O módulo de Young equivalente depende somente da microtopologia da célula, o vetor $f_c^{[.]}$ depende tanto da microtopologia quanto do campo de deslocamentos \hat{a}^G . Sendo \check{N}_s o número de microelementos sólidos e \check{N}_f o número de microelementos fluidos de uma dada célula, propõe-se:

$$E_y^{[.]} = \left(\frac{\check{N}_s}{\check{N}_s + \check{N}_f} \right)^{p_v} E_y^0 = (v^{[.]})^{p_v} E_y^0 \quad (2.170)$$

Onde $v^{[.]}$ representa a fração volumétrica de sólido na célula e o expoente p_v é um parâmetro livre do modelo, que assume valores reais positivos. Assim, o módulo de Young da célula depende somente da quantidade relativa de sólido que a compõe. Uma célula completamente fluida possui rigidez nula, uma célula completamente sólida possui a mesma rigidez que o material sólido e, em condições intermediárias, a rigidez varia de forma monótona. A Figura 2.9 apresenta o comportamento do módulo de Young equivalente $E_y^{[.]}$ em função de $v^{[.]}$.

No que diz respeito ao módulo de Young, o modelo proposto transforma a célula heterogênea e anisotrópica em um elemento homogêneo e isotrópico. Busca-se então definir um vetor de cargas $f_c^{[.]}$ que seja capaz de dar à célula um comportamento próximo ao real, ou seja, é através desse vetor que o carregamento hidrostático interno, a heterogeneidade e a anisotropia da célula são representados.

Para determinar $f_c^{[.]}$, avaliam-se 8 pontos representativos, apresentados na célula exemplo da Figura 2.10. Considera-se uma célula isolada, com dupla simetria. Não há molas, nem cargas pontuais aplicadas sobre a estrutura ou elementos: a deformação do corpo se dá unicamente pela pressão p_c aplicada sobre o fluido. Propõe-se definir as cargas nodais $f_c^{[.]}$ de maneira que os deslocamentos dos pontos representativos sejam iguais aos deslocamentos nodais do macroelemento sob as mesmas restrições.

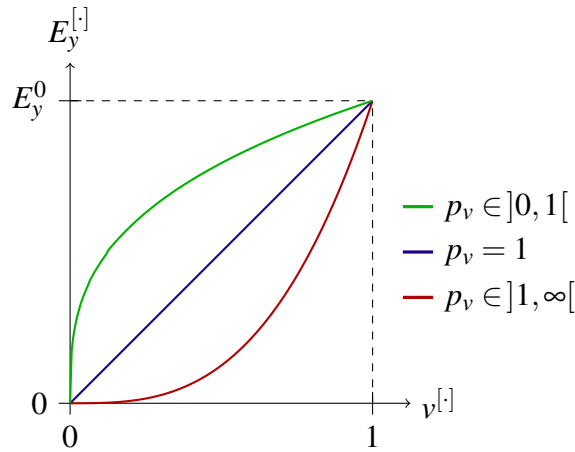


Figura 2.9 – Módulo de Young Equivalente

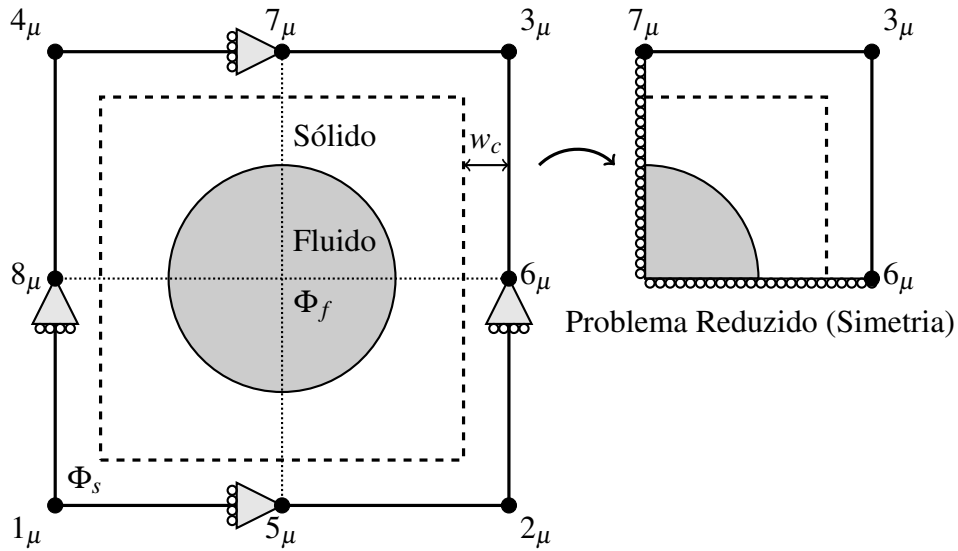


Figura 2.10 – Pontos de Interesse

Dessa forma, supondo que o comportamento das arestas das células pode ser bem aproximado por polinômios quadráticos, o modelo visa garantir a cinemática das fronteiras para uma célula isolada. Essa escolha foi feita considerando que se preocupa apenas em como cada célula influencia o comportamento da macroestrutura e, como já foi dito, por não haver interesse em se conhecer os valores de tensão no interior das células.

Sob tais condições, para uma microtopologia conhecida, soluciona-se o sistema da microescala e obtém-se o vetor de deslocamentos \check{a}_s^G . Como a malha é fixa, sendo \check{m}^G o número de nós da microestrutura, pode-se definir uma matriz retangular constante M_c , de dimensões $(16, 2\check{m}^G)$, que transforma \check{a}^G no vetor de deslocamentos dos nós representativos a_c . Para cada nó m_μ há dois graus de liberdade, $(a_m)_h$ (deslocamento horizontal) e $(a_m)_v$ (deslocamento ver-

tical).

$$a_c = \begin{Bmatrix} (a_1)_h \\ (a_1)_v \\ (a_2)_h \\ (a_2)_v \\ \vdots \\ (a_8)_h \\ (a_8)_v \end{Bmatrix} = M_c \check{a}^G \quad (2.171)$$

O termo $(M_c)_{ij}$ vale 1 quando o grau de liberdade j da malha da microescala corresponde ao grau de liberdade i em a_c , vale 0 caso contrário. Removendo-se as colunas de graus de liberdade restritos através da matriz de restrições \check{R}_c , tem-se a matriz M_c^R tal que:

$$\begin{cases} M_c^R = M_c \check{R}_c^T \\ a_c = M_c^R \check{a}^R \end{cases} \quad (2.172)$$

Uma vez conhecido a_c e $E_y^{[\cdot]}$, pode-se obter o resíduo estrutural $(\hat{\psi}_s^c)_e$ para o elemento Quad8. Tem-se, então, que o carregamento $\bar{f}_c^{[\cdot]}$ no sistema de referência da célula, é dado pelo equilíbrio:

$$(\hat{\psi}_s^c)_e - \bar{f}_c^{[\cdot]} = 0 \Rightarrow \bar{f}_c^{[\cdot]} = (\hat{\psi}_s^c)_e \quad (2.173)$$

A Figura 2.11 ilustra o elemento representativo proposto, em coordenadas locais.

No caso real, os carregamentos hidrostáticos variam em módulo e sentido conforme altera-se o campo de deslocamentos, contudo, no modelo proposto, o valor dos carregamentos é mantido constante e sua dependência ao movimento é dada exclusivamente pelas rotações rígidas da célula. Utiliza-se a mesma rotação para as cargas de cada um dos nós, para isso, define-se uma matriz de rotação média \bar{R}_e ao elemento, dependente de \hat{a}^G :

$$\begin{cases} R_e^* = \frac{\int_{\mathbb{X}_0} R dV_{\mathbb{X}_0}}{\int_{\mathbb{X}_0} 1 dV_{\mathbb{X}_0}} \\ \bar{R}_e = \frac{R_e^*}{\sqrt{\det(R_e^*)}} \end{cases} \quad (2.174)$$

Define-se, para cada ponto do elemento, um ponto p sobre a circunferência de raio unitário, com ângulo correspondente à matriz de rotação R . Tem-se que o ângulo de rotação da matriz \bar{R}_e é o ângulo da reta que passa pela origem e pelo centroide do conjunto de pontos p .

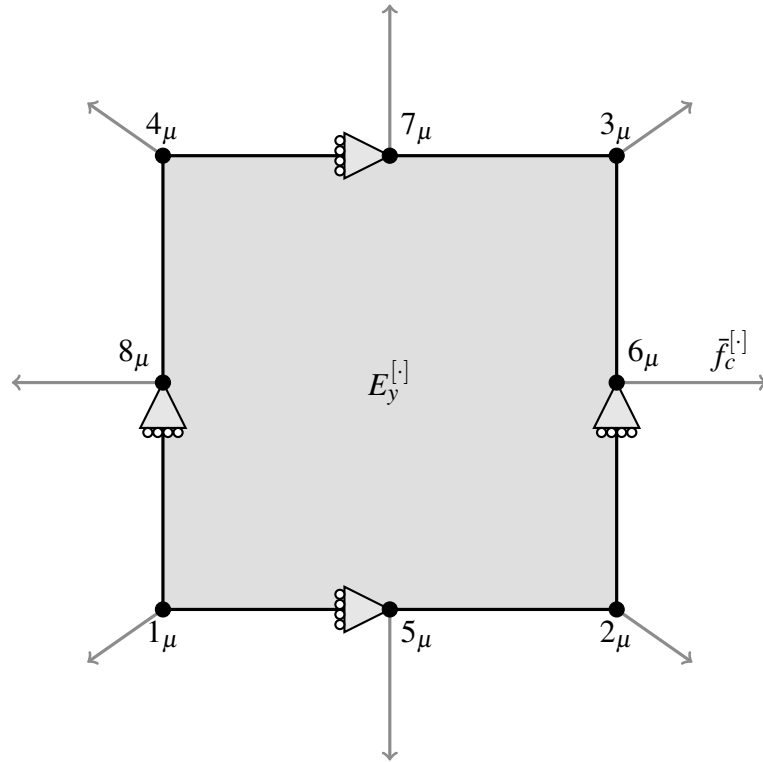


Figura 2.11 – Carregamento Equivalente em Coordenadas Locais

Isso mostra que, de fato, a matriz \bar{R}_e representa uma rotação média do elemento. Destaca-se que, na implementação numérica, essa integral é obtida pela quadratura de Gauss.

Tem-se, para cada ponto do elemento:

$$R = F U^{-1} \quad (2.175)$$

A matriz \bar{R}_e tem dimensões (2,2) e rotaciona um vetor de dimensão (2). Para rotacionar cada subvetor de $\bar{f}_c^{[.]}$, de dimensão (16), é necessário definir uma matriz aumentada \bar{R}_e^A , de dimensões (16,16). Sendo O a matriz nula de dimensões (2,2), tem-se:

$$\bar{R}_e^A = \begin{bmatrix} \bar{R}_e & O & O & O & O & O & O & O \\ O & \bar{R}_e & O & O & O & O & O & O \\ O & O & \bar{R}_e & O & O & O & O & O \\ O & O & O & \bar{R}_e & O & O & O & O \\ O & O & O & O & \bar{R}_e & O & O & O \\ O & O & O & O & O & \bar{R}_e & O & O \\ O & O & O & O & O & O & \bar{R}_e & O \\ O & O & O & O & O & O & O & \bar{R}_e \end{bmatrix} \quad (2.176)$$

Assim, o vetor $f_c^{[\cdot]}$ é dado por:

$$f_c^{[\cdot]} = \bar{R}_e^A \bar{f}_c^{[\cdot]} \quad (2.177)$$

Onde, a matriz de rotação depende de \hat{a}^G e o vetor de cargas em coordenadas locais depende da microtopologia da célula. Sendo I a matriz identidade de dimensões $(2, 2)$, pode-se escrever \bar{R}_e^A como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{R}_e^A = \sum_{i=1}^8 (I_i^A)^T \bar{R}_e (I_i^A) \\ I_1^A = \begin{bmatrix} I & O & O & O & O & O & O & O \end{bmatrix} \\ I_2^A = \begin{bmatrix} O & I & O & O & O & O & O & O \end{bmatrix} \\ \vdots \\ I_8^A = \begin{bmatrix} O & O & O & O & O & O & O & I \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (2.178)$$

Com isso, o elemento representativo está completamente determinado. Apesar de o modelo possuir várias simplificações, o importante no processo de otimização é a comparação entre células. Assim, apenas é preciso garantir qualitativamente que o comportamento da estrutura seja condizente com o problema físico sendo representado, não há necessidade de grande exatidão nos valores absolutos.

Aqui, tem-se que a matriz elementar $(\hat{K}_b)_e$ é dada por:

$$(\hat{K}_b)_e = \hat{K}_c^{[\cdot]} = \frac{\partial f_c^{[\cdot]}}{\partial \hat{a}_e} = \frac{\partial \bar{R}_e^A}{\partial \hat{a}_e} \bar{f}_c^{[\cdot]} \quad (2.179)$$

Por sua vez, a derivada de \bar{R}_e^A é dada por:

$$\frac{\partial \bar{R}_e^A}{\partial \hat{a}_e} = \sum_{k=1}^8 (I_k^A)^T \frac{\partial \bar{R}_e}{\partial \hat{a}_e} (I_k^A) \quad (2.180)$$

Em notação indicial, tem-se:

$$\frac{\partial (\bar{R}_e)_{ij}}{\partial (\hat{a}_e)_t} = \frac{\partial (\bar{R}_e)_{ij}}{\partial (R_e^*)_{pq}} \frac{\partial (R_e^*)_{pq}}{\partial (\hat{a}_e)_t} \quad (2.181)$$

Já que R_e^* tem dimensões $(2, 2)$, o primeiro termo é dado por:

$$\frac{\partial (\bar{R}_e)_{ij}}{\partial (R_e^*)_{pq}} = \frac{\delta_{ip} \delta_{qj}}{\sqrt{\det(R_e^*)}} - \frac{\text{tr}(R_e^*) \delta_{pq} - ((R_e^*)^T)_{pq}}{2 \left(\sqrt{\det(R_e^*)} \right)^3} (R_e^*)_{ij} \quad (2.182)$$

Ainda, como R_e^* é formada por matrizes ortogonais de determinantes unitários, tem-se que $\text{tr}(R_e^*)I - (R_e^*)^T = R_e^*$, logo:

$$\frac{\partial(\bar{R}_e)_{ij}}{\partial(R_e^*)_{pq}} = \frac{1}{\sqrt{\det(R_e^*)}} \left(\delta_{ip} \delta_{qj} - \frac{1}{2} (\bar{R}_e)_{ij} (\bar{R}_e)_{pq} \right) \quad (2.183)$$

O segundo termo é dado por:

$$\frac{\partial(R_e^*)_{pq}}{\partial(\hat{a}_e)_t} = \frac{\int_{\mathbb{X}_0} \frac{\partial(R)_{pq}}{\partial(\hat{a}_e)_t} dV_{\mathbb{X}_0}}{\int_{\mathbb{X}_0} 1 dV_{\mathbb{X}_0}} \quad (2.184)$$

Onde:

$$\frac{\partial(R)_{pq}}{\partial(\hat{a}_e)_t} = \frac{\partial F_{pk}}{\partial(\hat{a}_e)_t} U_{kq}^{-1} + F_{pk} \frac{\partial U_{kq}^{-1}}{\partial(\hat{a}_e)_t} \quad (2.185)$$

De acordo com o que já foi apresentado, sabe-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_{pk}}{\partial(\hat{a}_e)_t} = D_{kpt} \\ \frac{\partial U_{kq}^{-1}}{\partial(\hat{a}_e)_t} = \frac{\partial U_{kq}^{-1}}{\partial U_{mn}} \frac{\partial U_{mn}}{\partial C_{rs}} \frac{\partial C_{rs}}{\partial(\hat{a}_e)_t} \\ \frac{\partial U_{kq}^{-1}}{\partial U_{mn}} = -U_{km}^{-1} U_{nq}^{-1} \\ \frac{\partial C_{rs}}{\partial(\hat{a}_e)_t} = D_{rst} + D_{srt} + D_{rwt} D_{swv} (\hat{a}_e)_v + D_{rww} (\hat{a}_e)_v D_{swt} \end{array} \right. \quad (2.186)$$

Resta ainda o termo $\frac{\partial U_{mn}}{\partial C_{rs}}$ para obter a derivada da matriz de rotação. Para isso, escreve-se U como:

$$U = \frac{C + \sqrt{\lambda_1 \lambda_2} I}{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}} \quad (2.187)$$

Onde $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$ são os autovalores da matriz C , simétrica e definida positiva.

Assim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_{mn}}{\partial C_{rs}} &= \frac{\delta_{mr} \delta_{sn}}{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}} \\ &- \frac{\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}}{2\sqrt{\lambda_1}(\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2})} (L_1)_{mn} (L_1)_{rs} - \frac{\sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_1}}{2\sqrt{\lambda_2}(\sqrt{\lambda_2} + \sqrt{\lambda_1})} (L_2)_{mn} (L_2)_{rs} \end{aligned} \quad (2.188)$$

Definindo os escalares:

$$\left| \begin{aligned} f_{R_0} &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2}} \\ f_{R_1} &= \frac{\sqrt{\lambda_1} - \sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1} (\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2})} \\ f_{R_2} &= \frac{\sqrt{\lambda_2} - \sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_2} (\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2})} \end{aligned} \right. \quad (2.189)$$

As matrizes:

$$\left| \begin{aligned} W_{R_a} &= U^{-1} P \\ W_{R_b} &= I - f_{R_0} R F^T \\ X_{R_a} &= R P \\ X_{R_b} &= U^{-1} F^T \\ Y_{R_a} &= R L_1 U^{-1} \\ Y_{R_b} &= P^T L_1 F^T \\ Z_{R_a} &= R L_2 U^{-1} \\ Z_{R_b} &= P^T L_2 F^T \end{aligned} \right. \quad (2.190)$$

E os vetores:

$$\left| \begin{aligned} y_R &= Y_{R_b} : Q \\ z_R &= Z_{R_b} : Q \end{aligned} \right. \quad (2.191)$$

E combinando a Equação 2.185, Equação 2.186 e Equação 2.188, chega-se na seguinte expressão para a derivada de R :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(R)_{pq}}{\partial(\hat{a}_e)_t} &= (W_{R_a})_{qx} (W_{R_b})_{py} Q_{xyt} - f_{R_0} (X_{R_a})_{px} (X_{R_b})_{qy} Q_{xyt} \\ &\quad + f_{R_1} (Y_{R_a})_{pq} (y_R)_t + f_{R_2} (Z_{R_a})_{pq} (z_R)_t \end{aligned} \quad (2.192)$$

Como R_e^* e \bar{R}_e não dependem da posição no elemento, pode-se passar os termos da Equação 2.183 para dentro da integral da Equação 2.184.

Definindo os escalares:

$$\left| \begin{aligned} g_{R_1} &= f_{R_1} (\bar{R}_e : Y_{R_a}) = f_{R_1} \text{tr}(\bar{R}_e Y_{R_a}^T) \\ g_{R_2} &= f_{R_2} (\bar{R}_e : Z_{R_a}) = f_{R_2} \text{tr}(\bar{R}_e Z_{R_a}^T) \end{aligned} \right. \quad (2.193)$$

As matrizes:

$$\left| \begin{array}{l} W_{R_c} = W_{R_a}^T \bar{R}_e^T W_{R_b} \\ X_{R_c} = X_{R_a}^T \bar{R}_e X_{R_b} \end{array} \right. \quad (2.194)$$

E os vetores:

$$\left| \begin{array}{l} w_R = W_{R_c} : Q \\ x_R = X_{R_c} : Q \end{array} \right. \quad (2.195)$$

Tem-se que:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial(\bar{R}_e)_{ij}}{\partial(\hat{a}_e)_t} = \frac{\int_{\mathbb{X}_0} \Lambda_{ijt} dV_{\mathbb{X}_0}}{\sqrt{\det(R_e^*)} \int_{\mathbb{X}_0} 1 dV_{\mathbb{X}_0}} \\ \Lambda_{ijt} = (W_{R_a})_{jx} (W_{R_b})_{iy} Q_{xyt} - f_{R_0} (X_{R_a})_{ix} (X_{R_b})_{jy} Q_{xyt} \\ \quad + f_{R_1} (Y_{R_a})_{ij} (y_R)_t + f_{R_2} (Z_{R_a})_{ij} (z_R)_t \\ \quad - \frac{1}{2} (\bar{R}_e)_{ij} [w_R - f_{R_0} x_R + g_{R_1} y_R + g_{R_2} z_R]_t \end{array} \right. \quad (2.196)$$

Sendo:

$$\left| \begin{array}{l} \hat{K}_c^{[\cdot]} = \sum_{i=1}^8 K_i \\ f_i = (I_i^A) (\bar{f}_c)^{[\cdot]} \\ K_i = (I_i^A)^T \frac{\partial \bar{R}_e}{\partial \hat{a}_e} f_i \end{array} \right. \quad (2.197)$$

Tem-se que cada matriz K_i é dada por:

$$\left| \begin{array}{l} (K_i)_{at} = \frac{\int_{\mathbb{X}_0} \Lambda_{at}^* dV_{\mathbb{X}_0}}{\sqrt{\det(R_e^*)} \int_{\mathbb{X}_0} 1 dV_{\mathbb{X}_0}} \\ \Lambda_{at}^* = (W_{R_a}^T f_i)_x (I_i^T W_{R_b})_{ay} Q_{xyt} - f_{R_0} (I_i^T X_{R_a})_{ax} (X_{R_b}^T f_i)_y Q_{xyt} \\ \quad + f_{R_1} (I_i^T Y_{R_a} f_i)_a (y_R)_t + f_{R_2} (I_i^T Z_{R_a} f_i)_a (z_R)_t \\ \quad - \frac{1}{2} (I_i^T \bar{R}_e f_i)_a [w_R - f_{R_0} x_R + g_{R_1} y_R + g_{R_2} z_R]_t \end{array} \right. \quad (2.198)$$

Sabendo-se que para dois vetores quaisquer, v_m^a de dimensão (8) e v_m^b de dimensão (2), tem-se:

$$\begin{cases} (v_m^a)_x Q_{xyt} = [e_1 (v_m^a)^T R_1 + e_2 (v_m^a)^T R_2]_{yt} \\ (v_m^b)_y Q_{xyt} = [(e_1^T v_m^b) R_1 + (e_2^T v_m^b) R_2]_{xt} \end{cases} \quad (2.199)$$

Onde R_1 e R_2 são as matrizes apresentadas na Equação 2.145.

Definindo-se os vetores:

$$\begin{cases} v_W = W_{R_a}^T (f_k)_{[n]} \\ v_X = X_{R_b}^T (f_k)_{[n]} \\ v_Y = I_k^T Y_{R_a} (f_k)_{[n]} \\ v_Z = I_k^T Z_{R_a} (f_k)_{[n]} \\ v_A = I_k^T \bar{R}_e (f_k)_{[n]} \\ v_B = w_R - f_{R_0} x_R + g_{R_1} y_R + g_{R_2} z_R \end{cases} \quad (2.200)$$

E as matrizes:

$$\begin{cases} M_W = I_k^T W_{R_b} \\ M_X = I_k^T X_{R_a} \\ M_{Q_W} = M_W (e_1 v_W^T R_1 + e_2 v_W^T R_2) \\ M_{Q_X} = M_X ((e_1^T v_X) R_1 + (e_2^T v_X) R_2) \\ M_Y = v_Y y_R^T \\ M_Z = v_Z z_R^T \\ M_C = v_A v_B^T \end{cases} \quad (2.201)$$

Tem-se enfim uma formulação matricial dos componentes de $\hat{K}_c^{[.]}$:

$$\begin{cases} K_i = \frac{\int_{\mathbb{X}_0} \Lambda^* dV_{\mathbb{X}_0}}{\sqrt{\det(R_e^*)} \int_{\mathbb{X}_0} 1 dV_{\mathbb{X}_0}} \\ \Lambda^* = M_{Q_W} - f_{R_0} M_{Q_X} + f_{R_1} M_Y + f_{R_2} M_Z - \frac{1}{2} M_C \end{cases} \quad (2.202)$$

Observa-se que este termo faz com que a matriz tangente \hat{K}^G deixe de ser simétrica. Todos os outros termos do resíduo e da matriz tangente são análogos aos formulados para a microescala, alterando-se apenas o módulo de Young e anulando-se a pressão. O problema

da macroescala pode ser solucionado da mesma forma que o da micro, através do método de Newton-Raphson, no qual o vetor de deslocamentos é atualizado iterativamente por:

$$\hat{a}_{i+1}^R = \hat{a}_i^R - (\hat{K}^R)^{-1} \hat{\psi}^R(\hat{a}_i^R), i \in \mathbb{N} \quad (2.203)$$

Isso conclui a descrição do procedimento de simulação numérica dos mecanismos propostos: dadas as microtopologias das células e a macrotopologia do atuador, pode-se obter o campo de deslocamentos do sistema. Na sequência, busca-se encontrar topologias que maximizam uma dada função de performance.

3 OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA

3.1 Problema Microescala

Primeiramente, considera-se um atuador não-celular que segue a mesma formulação desenvolvida para a microescala. Dada a discretização do domínio de trabalho, uma estrutura qualquer é descrita por uma topologia, representada por um vetor $z = \{z_1, z_2, \dots, z_{\check{N}_t}\}^T \in [0, 1]^{\check{N}_t}$, onde \check{N}_t é o número de elementos na malha da microescala. Dado um elemento, seu valor correspondente no vetor de topologia, z_e , descreve se o elemento é sólido ($z_e = 1$), fluido ($z_e = 0$) ou algo intermediário ($z_e \in]0, 1[$). O motivo da utilização de uma variável de projeto contínua é possibilitar a implementação de métodos de otimização de primeira ordem (ou ordem maior), nos quais é necessário diferenciar a função-objetivo. Contudo, no fim do processo, deve-se garantir que o vetor de solução contenha apenas valores discretos, somente com elementos sólidos ou fluidos.

Dadas funções monótonas γ_s e γ_p , ambas de classe \mathcal{C}^1 , tais que $\gamma_s(0) = \gamma_p(1) = 0$ e $\gamma_s(1) = \gamma_p(0) = 1$, definem-se o coeficiente de Poisson $\check{\nu}_e$, o módulo de Young $(\check{E}_y)_e$ e a pressão aplicada $(\check{p}_c)_e$ como:

$$\left| \begin{array}{l} \check{\nu}_e = \nu^0 \\ (\check{E}_y)_e = \gamma_s(z_e) E_y^0 \\ (\check{p}_c)_e = \gamma_p(z_e) p_c \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Na Equação 3.1, ν^0 e E_y^0 são as propriedades do material dos elementos sólidos e p_c é a pressão aplicada nos elementos fluidos, todas constantes. Com isso, para restrições e carregamentos pré-estabelecidos, tem-se o vetor de deslocamentos do equilíbrio estático $\check{\alpha}^G$ como uma função de z .

Como os parâmetros de Lamé μ_t e λ_t são diretamente proporcionais ao módulo de Young, o tensor de tensões T também é. Logo, o resíduo estrutural e a matriz de rigidez tangente de cada elemento, $(\check{\Psi}_s)_e$ e $(\check{K}_s)_e$, são dependentes do vetor z . Sendo $(\check{\Psi}_s)_e$ e $(\check{K}_s)_e$ o resíduo estrutural e matriz de rigidez tangente considerando o elemento como sólido ($z_e = 1$), tem-se:

$$\left| \begin{array}{l} (\check{\Psi}_s)_e(z) = (\check{\Psi}_s^*)_e(z, \check{\alpha}^G(z)) = \gamma_s(z_e) (\check{\Psi}_s)_e(\check{\alpha}_e) \\ (\check{K}_s)_e(z) = (\check{K}_s^*)_e(z, \check{\alpha}^G(z)) = \gamma_s(z_e) (\check{K}_s)_e(\check{\alpha}_e) \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Por sua vez, sendo $(\check{\Psi}_p)_e$ e $(\check{K}_p)_e$ o resíduo e matriz do carregamento hidrostático

para o elemento fluido ($z_e = 0$), os termos referentes a pressão $(\check{\psi}_p)_e$ e $(\check{K}_p)_e$ são dados por:

$$\left| \begin{aligned} (\check{\psi}_p)_e(z) &= (\check{\psi}_p^*)_e(z, \check{a}^G(z)) = \gamma_p(z_e) (\check{\psi}_p)_e(\check{a}_e) \\ (\check{K}_p)_e(z) &= \gamma_p(z_e) (\check{K}_p)_e \end{aligned} \right. \quad (3.3)$$

O restante dos resíduos e matrizes tangentes não são alterados pela topologia. Ao utilizar a Equação 3.2 e a Equação 3.3 na construção de $\check{\psi}^R$ e \check{K}^R , obtém-se \check{a}^R pelo processo iterativo da Equação 2.166 para uma topologia qualquer z .

Pode-se então abordar o seguinte problema de otimização. Deseja-se encontrar a topologia $\bar{z} \in [0, 1]^{\check{N}_t}$ que maximiza (ou minimiza) uma determinada função-objetivo, $h(z)$, sujeita a restrições de igualdade, $g_i(z)$, e de desigualdade, $g_d(z)$. Matematicamente:

$$\left| \begin{aligned} \bar{z} &= \underset{z}{\text{Max}} \{h(z)\} \\ &\text{sujeito a} \\ g_i(\bar{z}) &= 0 \\ g_d(\bar{z}) &\leq 0 \end{aligned} \right. \quad (3.4)$$

Neste trabalho, tem-se $h(z) = h^*(z, \check{a}^G(z))$ e há uma única restrição de igualdade, que determina a proporção entre sólido e fluido da topologia final. Como consideram-se apenas malhas regulares, de elementos idênticos, não há necessidade em distinguir o volume dos elementos. Assim, a restrição volumétrica iguala a soma dos valores z_e a uma fração v_f do número total de elementos \check{N}_t .

$$\left| \begin{aligned} \bar{z} &= \underset{z}{\text{Max}} \{h^*(z, \check{a}^G(z))\} \\ &\text{sujeito a} \\ g_i(z) &= \frac{\sum_e z_e}{\check{N}_t} - v_f = 0 \end{aligned} \right. \quad (3.5)$$

Todavia, devido ao caráter discreto da solução, na implementação computacional, é necessário aliviar a restrição permitindo que a razão volumétrica final esteja a uma tolerância $\varepsilon_r \in \left[\frac{1}{2\check{N}_t}, \frac{1}{\check{N}_t} \right]$ do valor desejado. Tem-se, portanto:

$$\left| \begin{aligned} \bar{z} &= \underset{z}{\text{Max}} \{h^*(z, \check{a}^G(z))\} \\ &\text{sujeito a} \\ g_d(z) &= \left| \frac{\sum_e z_e}{\check{N}_t} - v_f \right| - \varepsilon_r \leq 0 \end{aligned} \right. \quad (3.6)$$

No método BESO, parte-se de uma topologia inicial viável $z^{(0)} \in \{0, 1\}^{\check{N}_t}$, com razão volumétrica $v^{(0)}$. Define-se, através do parâmetro $ER \in]0, 1]$ (*evolutionary rate*), a quantidade de elementos sólidos da próxima iteração. Este parâmetro limita a variação de volume

por iteração e determina quantas iterações são necessárias para que se atinja a razão volumétrica alvo v_f .

$$\left| \begin{aligned} er &= \left| \frac{\sum_e z_e^{(i)}}{\check{N}_t} - v_f \right| = |v^{(i)} - v_f| \\ \sum_e z_e^{(i+1)} &= \begin{cases} \sum_e z_e^{(i)} + \text{round}(\min(er, ER) \check{N}_t) & , \text{ se } v^{(i)} < v_f - \varepsilon_r \\ \sum_e z_e^{(i)} - \text{round}(\min(er, ER) \check{N}_t) & , \text{ se } v^{(i)} > v_f + \varepsilon_r \\ \sum_e z_e^{(i)} & , \text{ se } g_d(z^{(i)}) \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \right. \quad (3.7)$$

Uma vez que se conhece quantos elementos sólidos devem haver na iteração, atribui-se a cada elemento um número de sensibilidade α_e , que indica comparativamente quanto o elemento contribui para a maximização da função-objetivo. Ordenam-se os elementos de acordo com o número de sensibilidade e, garantindo a razão volumétrica da iteração, os de maior valor são transformados em sólidos ($z_e = 1$) enquanto os de menor valor são transformados em fluido ($z_e = 0$). Contudo, limita-se, através do parâmetro $AR \in]0, 1]$ (*maximal volume addition ratio*), a quantidade de elementos fluidos a serem transformados em sólidos numa mesma iteração, a qual deve ser menor ou igual ao produto $AR \check{N}_t$. Assim, numa situação em que a adição de sólidos ultrapassaria o valor máximo, deve-se alterar esta etapa: os elementos fluidos de maior número de sensibilidade são transformados em sólidos até o valor limite dado por AR , em seguida os elementos sólidos de pior número de sensibilidade são transformados em fluidos até a razão volumétrica da iteração ser obtida.

Após atingir v_f , o processo continua com razão volumétrica constante, até que a variação da função-objetivo entre iterações se torne suficientemente pequena. Para tornar a convergência mais robusta, na implementação, compara-se a soma das últimas n_c iterações com a soma das n_c iterações anteriores, um valor pequeno τ é usado como critério de convergência (10^{-2} por exemplo). Dessa forma, considera-se que um ótimo local \bar{z} foi atingido na iteração \bar{i} quando:

$$\left| \begin{aligned} &g_d(z^{(\bar{i})}) \leq 0 \\ &\frac{\sum_{k=0}^{n_c-1} h(z^{(\bar{i}-k)})}{\sum_{k=n_c}^{2n_c-1} h(z^{(\bar{i}-k)})} \leq \tau \end{aligned} \right. \quad (3.8)$$

O programa sempre executa ao menos $2n_c$ iterações, após isso começa-se a avaliar a convergência da função-objetivo. Destaca-se também que o algoritmo garante que em toda iteração $z^{(i)} \in \{0, 1\}^{\check{N}_t}$, isto é, cada topologia obtida é sempre viável no que diz respeito às variáveis de projeto.

Deseja-se então definir um número de sensibilidade capaz de representar comparativamente a contribuição de cada elemento. Considerando funções analíticas, os efeitos de uma alteração $\Delta z \in \{-1, 0, 1\}^{\tilde{N}_t}$ na topologia sobre a função-objetivo podem ser previstos pela expansão de Taylor:

$$\Delta h = h(z + \Delta z) - h(z) = \frac{\partial h(z)}{\partial z_i} (\Delta z)_i + \frac{1}{2} (\Delta z)_i \left(\frac{\partial^2 h(z)}{\partial z_i \partial z_j} \right) (\Delta z)_j + o(\Delta z^2) \quad (3.9)$$

O termo $o(\Delta z^2)$, aglutina o restante da série infinita, as parcelas de ordem maior que 2.

Após obter o vetor de sensibilidades, os elementos são comparados individualmente, sem levar em conta quantos e quais elementos serão alterados na iteração. Assim, é inerente ao método a hipótese de que o número de sensibilidade de um elemento independe da adição ou remoção dos outros. Dessa forma, assume-se que a alteração de um elemento e_i não tem influência relevante na maneira com que h varia com outro elemento e_j . Matematicamente:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial z_{ei} \partial z_{ej}} \approx 0, \text{ se } i \neq j \quad (3.10)$$

Desprezar esses termos é mais razoável em casos nos quais poucos elementos são alterados por vez, de forma a haver poucas alterações no comportamento da estrutura entre iterações subsequentes. Os parâmetros ER e AR , que limitam alterações na topologia, podem ser calibrados para tornar a hipótese mais plausível. Nessas condições, Δh pode ser escrito como:

$$\left| \begin{aligned} \Delta h &= \sum_e \delta h_e \\ \delta h_e &= \frac{\partial h(z)}{\partial z_e} (\Delta z)_e + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h(z)}{\partial z_e^2} (\Delta z)_e^2 + o((\Delta z)_e^2) \end{aligned} \right. \quad (3.11)$$

Os termos δh_e são as contribuições de cada elemento, quando eles são alterados de $(\Delta z)_e$. Para comparar elementos em condições distintas considera-se $(\Delta z)_e = 1$ para os elementos fluidos e $(\Delta z)_e = -1$ para os elementos sólidos, em seguida altera-se o sinal de $(\delta h)_e$ para os elementos sólidos (ou fluidos, mas não ambos). Define-se assim um número de sensibilidade α_e^h como:

$$\alpha_e^h = \begin{cases} - \left[\frac{\partial h}{\partial z_e} (-1) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial z_e^2} (-1)^2 + o \right] & , \text{ se } z_e = 1 \\ \left[\frac{\partial h}{\partial z_e} (1) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial z_e^2} (1)^2 + o \right] & , \text{ se } z_e = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Para viabilizar o processo computacional, assume-se uma segunda hipótese, a de que o primeiro termo da série é preponderante sobre o restante. Mais especificamente, assume-se que $\alpha_{ei}^h > \alpha_{ej}^h \Leftrightarrow \alpha_{ei}^a > \alpha_{ej}^a$, sendo os números de sensibilidade α_e^a dados pelo truncamento de a_e^h :

$$\alpha_e^a = \begin{cases} -\left[\frac{\partial h}{\partial z_e}(-1)\right] & , \text{ se } z_e = 1 \\ \left[\frac{\partial h}{\partial z_e}(1)\right] & , \text{ se } z_e = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

De forma mais simples:

$$\alpha_e^a = \frac{\partial h}{\partial z_e} \Leftrightarrow \alpha^a = \frac{\partial h}{\partial z} \quad (3.14)$$

Portanto, utiliza-se como vetor de sensibilidade a derivada da função-objetivo h em relação às variáveis de projeto z , dada por:

$$\alpha_e^a = \frac{\partial h}{\partial z_e} = \frac{\partial h^*}{\partial z_e} + \left(\frac{\partial h^*}{\partial \check{a}^G}\right)^T \left(\frac{\partial \check{a}^G}{\partial z_e}\right) = \frac{\partial h^*}{\partial z_e} + \left(\frac{\partial h^*}{\partial \check{a}^R}\right)^T \left(\frac{\partial \check{a}^R}{\partial z_e}\right) \quad (3.15)$$

Por sua vez, tem-se que:

$$\begin{aligned} \check{\Psi}^R = 0 \Rightarrow \frac{\partial \check{\Psi}^R}{\partial z_e} &= \frac{\partial (\check{\Psi}^*)^R}{\partial z_e} + \check{K}^R \frac{\partial \check{a}^R}{\partial z_e} = 0 \Rightarrow \\ \frac{\partial \check{a}^R}{\partial z_e} &= -(\check{K}^R)^{-1} \frac{\partial (\check{\Psi}^*)^R}{\partial z_e} \end{aligned} \quad (3.16)$$

Logo:

$$\alpha_e^a = \frac{\partial h^*}{\partial z_e} - \left(\frac{\partial h^*}{\partial \check{a}^R}\right)^T (\check{K}^R)^{-1} \left(\frac{\partial (\check{\Psi}^*)^R}{\partial z_e}\right) = \frac{\partial h^*}{\partial z_e} - \left[(\check{K}^R)^{-1} \frac{\partial h^*}{\partial \check{a}^R}\right]^T \left(\frac{\partial (\check{\Psi}^*)^R}{\partial z_e}\right) \quad (3.17)$$

Dessa maneira, conhecendo-se o objetivo e a influência da topologia em cada termo do resíduo, determina-se o vetor de sensibilidades através da Equação 3.17.

Para que não ocorra o problema de "tabuleiro de xadrez"(elementos sólidos ligados apenas por vértices, ao invés de pelas arestas), para evitar que a forma da solução seja dependente da discretização da malha e para obter topologias mais factíveis, aplica-se um filtro de suavização sobre o vetor de sensibilidades.

Primeiramente, definem-se números de sensibilidade para os nós da estrutura α^b . Sendo M_i o número de elementos conectados ao nó i e r_{ij} a distância entre o centro do elemento j ao nó i , tem-se (em notação usual):

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_i^b = \sum_{j=1}^{M_i} m_{ij} \alpha_j^a \\ m_{ij} = \frac{1}{M_i - 1} \left(1 - \frac{r_{ij}}{\sum_{j=1}^{M_i} r_{ij}} \right) \end{array} \right. \quad (3.18)$$

Ou seja, a sensibilidade de um nó é a média das sensibilidades dos elementos conectados a ele ponderadas pela distância, de modo que elementos de centro mais próximos ao nó têm maior peso na soma. Como $\sum_{j=1}^{M_i} m_{ij} = 1$, não há nenhum ganho nessa etapa, trata-se apenas de uma redistribuição dos valores de sensibilidade no espaço. Por exemplo, para uma malha regular de elementos Quad4 idênticos, o número de sensibilidade de cada nó corresponde à média aritmética dos números de sensibilidade dos elementos conectados.

Pode-se reescrever a Equação 3.18 como:

$$\left| \begin{array}{l} \alpha_i^b = \sum_{j=1}^{\check{N}_t} m_{ij} \alpha_j^a \\ m_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{M_i - 1} \left(1 - \frac{r_{ij}}{\sum_{j=1}^{M_i} r_{ij}} \right) & , \text{ se o elemento } j \text{ está conectado ao nó } i \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.19)$$

Pode-se então definir a matriz retangular H_{ne} de dimensões $(\check{m}^G, \check{N}_t)$, onde \check{m}^G é o número total de nós da malha, tal que:

$$\left| \begin{array}{l} \alpha^b = H_{ne} \alpha^a \\ (H_{ne})_{ij} = m_{ij} \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Uma vez obtidos os números de sensibilidades nodais, passa-se à segunda etapa da suavização, na qual os números de sensibilidades elementares filtrados α^c são obtidos. Define-se um parâmetro geométrico do filtro, \check{r}_{\max} , que define a distância máxima entre o centro de cada elemento i e o nó j para que a sensibilidade α_j^b seja computada em α_i^c . Ou seja, esse parâmetro

determina o alcance do filtro. Sendo W_i o número de nós dentro do círculo de raio \check{r}_{\max} centrado no elemento i , isto é, o número de nós j tais que $\|r_{ji}\| \leq \check{r}_{\max}$, tem-se (em notação usual):

$$\left| \begin{aligned} \alpha_i^c &= \sum_{j=1}^{W_i} w_{ij} \alpha_j^b \\ w_{ij} &= \frac{\check{r}_{\max} - r_{ji}}{\sum_{j=1}^{W_i} (\check{r}_{\max} - r_{ji})} \end{aligned} \right. \quad (3.21)$$

Ou seja, faz-se novamente uma média ponderada pelas distâncias, agora de alcance limitado pelo valor \check{r}_{\max} , ao invés de pelas conexões da malha. Novamente tem-se $\sum_{i=j}^{W_i} w_{ij} = 1$, portanto, não há ganho, apenas uma nova redistribuição dos valores de sensibilidade.

Pode-se reescrever a Equação 3.21 como:

$$\left| \begin{aligned} \alpha_i^c &= \sum_{j=1}^{\check{m}^G} w_{ij} \alpha_j^b \\ w_{ij} &= \frac{\max(0, \check{r}_{\max} - r_{ji})}{\sum_{j=1}^{\check{m}^G} \max(0, \check{r}_{\max} - r_{ji})} \end{aligned} \right. \quad (3.22)$$

Pode-se então definir a matriz retangular H_{en} de dimensões $(\check{N}_t, \check{m}^G)$ tal que:

$$\left| \begin{aligned} \alpha^c &= H_{en} \alpha^b \\ (H_{en})_{ij} &= w_{ij} \end{aligned} \right. \quad (3.23)$$

Dessa forma, o filtro de suavização corresponde a uma aplicação linear sobre o vetor α^a , dada pela matriz quadrada \check{H}_f de dimensões $(\check{N}_t, \check{N}_t)$:

$$\left| \begin{aligned} \alpha^c &= \check{H}_f \alpha^a \\ \check{H}_f &= H_{en} H_{ne} \end{aligned} \right. \quad (3.24)$$

Destaca-se que quanto maior o alcance \check{r}_{\max} mais o campo dos números de sensibilidade se aproxima de um campo uniforme. O aumento do raio do filtro favorece topologias mais simples, com membros de maior espessura. Pode-se questionar que a adulteração dos números de sensibilidade leva a uma topologia inferior no processo de otimização. Entretanto, como mencionado, valoriza-se aqui o significado físico das topologias (não deve ocorrer o problema de "tabuleiro de xadrez"), a independência da malha (quer-se um processo que solucione o problema real, independentemente da discretização do domínio) e a viabilidade de fabricação (é mais razoável uma estrutura com alguns membros espessos do que uma estrutura com uma grande quantidade de membros delgados).

Em seguida, realiza-se uma etapa de estabilização para evitar mudanças bruscas no vetor de sensibilidades e, portanto, na evolução da topologia. Define-se o vetor estabilizado α^d , que leva em conta todo o histórico dos números de sensibilidade filtrados α^c desde a primeira iteração do método. Tem-se na iteração $i > 0$:

$$\begin{cases} (\alpha^d)^{(i)} = (\check{\beta}) (\alpha^c)^{(i)} + (1 - \check{\beta}) (\alpha^d)^{(i-1)} \\ (\alpha^d)^{(0)} = (\alpha^c)^{(0)} \end{cases} \quad (3.25)$$

Assim, o escalar $\check{\beta} \in]0, 1]$ determina a ponderação entre o valor de sensibilidade calculado na iteração e seus histórico. Em sua forma explícita:

$$(\alpha^d)^{(i)} = (\check{\beta}) \left[\sum_{k=0}^{i-1} (1 - \check{\beta})^k (\alpha^c)^{(k)} \right] + (1 - \check{\beta})^i (\alpha^c)^{(0)} \quad (3.26)$$

Enfim, esse vetor de sensibilidades filtrado e estabilizado α^d é o que se utiliza como critério de comparação entre elementos em cada iteração do método BESO, descrito acima.

Após essas etapas, α^d deixa de corresponder à derivada da função-objetivo com respeito aos parâmetros de projeto, esse vetor serve apenas para comparar elementos e decidir como o método altera a topologia em cada iteração. Portanto, sem nenhuma perda prática, em qualquer momento do processo, pode-se modificar os vetores de sensibilidade aplicando funções monótonas sobre todos os seus termos. Por exemplo, pode-se multiplicar α^a por uma constante positiva para simplificar sua formulação.

Sendo os termos estruturais preponderantes para o bom condicionamento do problema, existem topologias nas quais a matriz \check{K}^R torna-se singular e o sistema do MEF admite infinitas soluções. Por exemplo, no caso de uma topologia onde há uma ilha de elementos sólidos cercado por elementos fluidos, qualquer solução com essa ilha transladada é ainda solução.

Para evitar que o processo de otimização topológica seja interrompido nesse tipo de situação, adota-se uma abordagem *soft kill*. Ao invés de considerar topologias do tipo $z \in \{0, 1\}^{\check{N}_t}$, consideram-se vetores $z \in \{z_{\min}, 1\}^{\check{N}_t}$, sendo $z_{\min} \in]0, 1[$. Com um z_{\min} suficientemente pequeno, essa topologia é usada para representar o comportamento da topologia de significado físico, com $z_{\min} = 0$. Em outras palavras, nessa abordagem, dá-se aos elementos fluidos uma pequena rigidez, apenas para evitar que o problema de análise se torne mal condicionado durante a otimização topológica. As formulações apresentadas não se alteram com essa modificação.

A Figura 3.1 mostra um fluxograma resumindo cada etapa do método BESO, para o caso de microestruturas apresentado nesta seção. Aqui, fala-se da convergência da função-objetivo no sentido computacional do termo (Equação 3.8).

Com isso, termina-se a descrição do processo de otimização para o caso microescala. Para a implementação, resta apenas definir e diferenciar a função-objetivo $h(z)$.

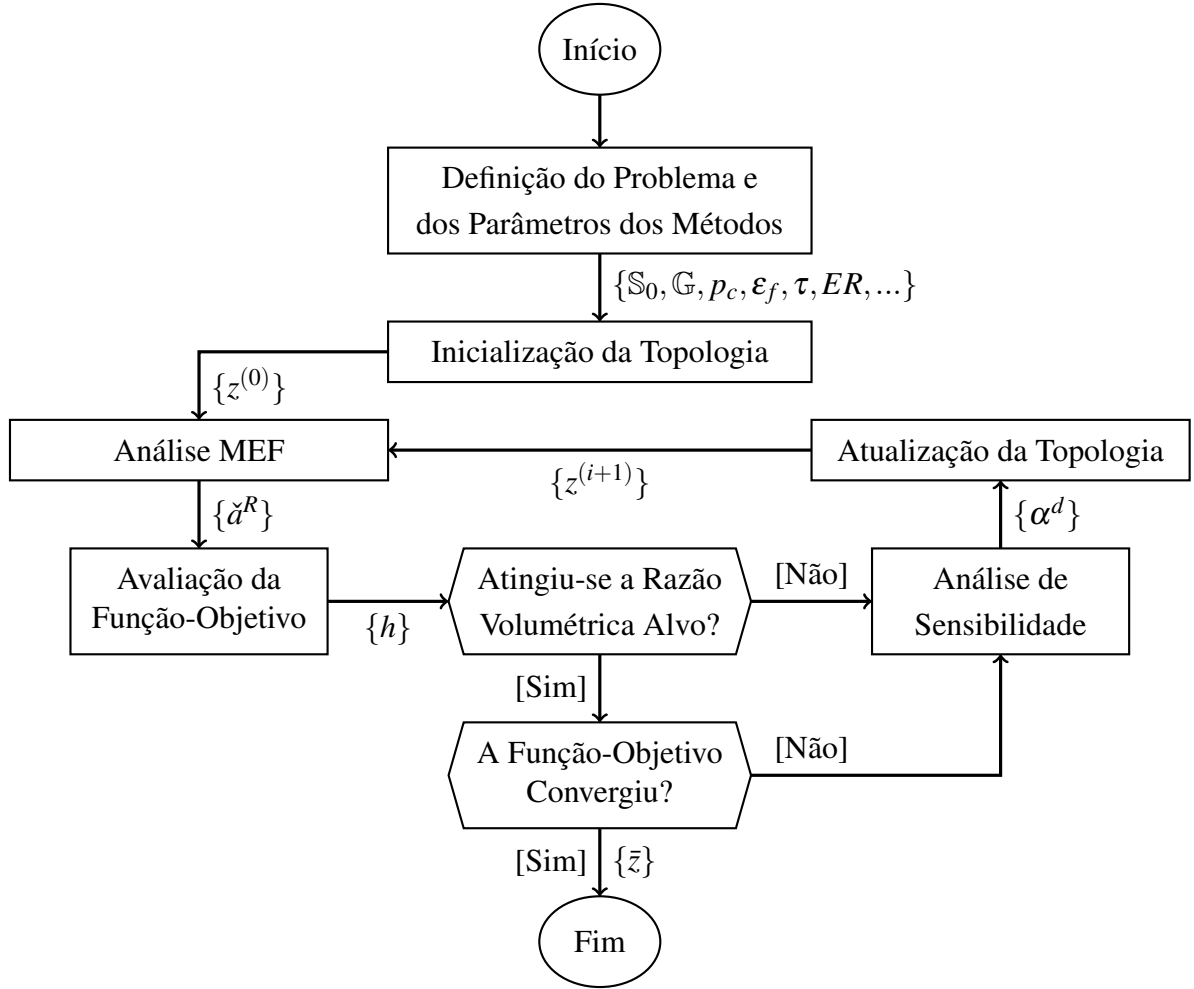


Figura 3.1 – Fluxograma BESO

3.2 Problema Macroescala

Nesta seção, considera-se um atuador celular definido pela distribuição de três tipos de células, cujas microtopologias são conhecidas, no domínio de trabalho. Utilizando o modelo apresentado na subseção 2.4.3, tem-se para as células de microtopologias $z^{[1]}$, $z^{[2]}$ e $z^{[3]}$, módulos de Young $E_y^{[1]}$, $E_y^{[2]}$ e $E_y^{[3]}$, e vetores de cargas $f_c^{[1]}$, $f_c^{[2]}$ e $f_c^{[3]}$. A topologia da macroestrutura é dada por dois vetores, $x = \{x_1, x_2, \dots, x_{\hat{N}_t}\}^T$ e $y = \{y_1, y_2, \dots, y_{\hat{N}_t}\}^T$, onde \hat{N}_t é o número de elementos na malha da macroescala. Dado um elemento, seus valores correspondentes nos vetores de topologia, x_e e y_e , especificam a qual célula ele corresponde. O elemento é uma célula do tipo [1] se $x_e = 1$ e $y_e = 1$; uma célula do tipo [2] se $x_e = 1$ e $y_e = 0$; uma célula do tipo [3] se $x_e = 0$ (y_e qualquer); ou algo intermediário, quando têm-se outras combinações de $(x_e, y_e) \in [0, 1]^2$.

Dadas funções monótonas de γ_s^x e γ_s^y de classe \mathcal{C}^1 , tais que $\gamma_s^x(0) = \gamma_s^y(0) = 0$ e $\gamma_s^x(1) = \gamma_s^y(1) = 1$, definem-se o coeficiente de Poisson $\hat{\nu}_e$ e o módulo de Young $(\hat{E}_y)_e$ do ma-

croelemento como:

$$\left| \begin{array}{l} \hat{\mathbf{v}}_e = \mathbf{v}^0 \\ (\hat{E}_y)_e = \gamma_s^x(x_e) \gamma_s^y(y_e) E_y^{[1]} + \gamma_s^x(x_e) (1 - \gamma_s^y(y_e)) E_y^{[2]} + (1 - \gamma_s^x(x_e)) E_y^{[3]} \end{array} \right. \quad (3.27)$$

O vetor de deslocamentos do equilíbrio estático \hat{a}^G passa a ser uma função de x e y . Analogamente ao caso microescala, sendo $(\hat{\psi}_s)_e$ e $(\hat{K}_s)_e$ o resíduo estrutural e matriz tangente considerando uma célula inteiramente sólida, tem-se:

$$\left| \begin{array}{l} (\hat{\psi}_s)_e(x, y) = (\hat{\psi}_s^*)_e(x, y, \hat{a}^G(x, y)) = \\ \left(\gamma_s^x(x_e) \gamma_s^y(y_e) \frac{E_y^{[1]}}{E_y^0} + \gamma_s^x(x_e) (1 - \gamma_s^y(y_e)) \frac{E_y^{[2]}}{E_y^0} + (1 - \gamma_s^x(x_e)) \frac{E_y^{[3]}}{E_y^0} \right) (\hat{\psi}_s)_e(\hat{a}_e) = \\ \left(\gamma_s^x(x_e) \gamma_s^y(y_e) (v^{[1]})^{p_v} + \gamma_s^x(x_e) (1 - \gamma_s^y(y_e)) (v^{[2]})^{p_v} + (1 - \gamma_s^x(x_e)) (v^{[3]})^{p_v} \right) (\hat{\psi}_s)_e(\hat{a}_e) \\ (\hat{K}_s)_e(x, y) = (\hat{K}_s^*)_e(x, y, \hat{a}^G(x, y)) = \\ \left(\gamma_s^x(x_e) \gamma_s^y(y_e) \frac{E_y^{[1]}}{E_y^0} + \gamma_s^x(x_e) (1 - \gamma_s^y(y_e)) \frac{E_y^{[2]}}{E_y^0} + (1 - \gamma_s^x(x_e)) \frac{E_y^{[3]}}{E_y^0} \right) (\hat{K}_s)_e(\hat{a}_e) = \\ \left(\gamma_s^x(x_e) \gamma_s^y(y_e) (v^{[1]})^{p_v} + \gamma_s^x(x_e) (1 - \gamma_s^y(y_e)) (v^{[2]})^{p_v} + (1 - \gamma_s^x(x_e)) (v^{[3]})^{p_v} \right) (\hat{K}_s)_e(\hat{a}_e) \end{array} \right. \quad (3.28)$$

Para os termos referentes ao carregamento das células, consideram-se funções monótonas γ_p^x e γ_p^y de classe \mathcal{C}^1 , tais que $\gamma_p^x(0) = \gamma_p^y(0) = 0$ e $\gamma_p^x(1) = \gamma_p^y(1) = 1$. Assim, para cada macroelemento, o vetor de cargas $(\hat{f}_c)_e$ e a matriz $(\hat{K}_b)_e$ são dados por:

$$\left| \begin{array}{l} (\hat{f}_c)_e(x, y) = (\hat{f}_c^*)_e(x, y, \hat{a}^G(x, y)) = \\ \gamma_p^x(x_e) \gamma_p^y(y_e) f_c^{[1]}(\hat{a}_e) + \gamma_p^x(x_e) (1 - \gamma_p^y(y_e)) f_c^{[2]}(\hat{a}_e) + (1 - \gamma_p^x(x_e)) f_c^{[3]}(\hat{a}_e) \\ (\hat{K}_b)_e(x, y) = (\hat{K}_b^*)_e(x, y, \hat{a}^G(x, y)) = \\ \gamma_p^x(x_e) \gamma_p^y(y_e) \hat{K}_c^{[1]}(\hat{a}_e) + \gamma_p^x(x_e) (1 - \gamma_p^y(y_e)) \hat{K}_c^{[2]}(\hat{a}_e) + (1 - \gamma_p^x(x_e)) \hat{K}_c^{[3]}(\hat{a}_e) \end{array} \right. \quad (3.29)$$

O restante dos resíduos e matrizes tangentes não são alterados pelos vetores de topologia. Ao utilizar a Equação 3.28 e a Equação 3.29 na construção de $\hat{\psi}^R$ e \hat{K}^R , obtém-se a solução \hat{a}^R pelo processo iterativo da Equação 2.203 para vetores de topologia quaisquer x e y .

Pode-se então encontrar as macrotopologias, dadas por x e y , que maximizam (ou minimizam) a função-objetivo de interesse, $h(x, y)$, sujeita a restrições.

Neste trabalho, tem-se que $h(x, y) = h^*(x, y, \hat{a}^G(x, y))$ e estabelecem-se restrições que determinam as proporções entre os tipos de células que compõem o domínio de trabalho.

Sendo \hat{N}_t o número total de células na macroestrutura e v_f^p e v_f^q as razões volumétricas impostas, o problema de otimização é dado por:

$$\left| \begin{array}{l} \{\bar{x}, \bar{y}\} = \text{Max}_{x,y} \{h^*(x,y, \hat{a}^R(x,y))\} \\ \text{sujeito a} \\ g_d^p(\bar{x}) = \left| \frac{\sum_e \bar{x}_e}{\hat{N}_t} - v_f^p \right| - \varepsilon_p \leq 0 \\ g_d^q(\bar{x}, \bar{y}) = \left| \frac{\sum_e \bar{x}_e \bar{y}_e}{\sum_e \bar{x}_e} - v_f^q \right| - \varepsilon_q \leq 0 \end{array} \right. \quad (3.30)$$

A restrição g_d^p define quantas células de tipo [3] devem compor a topologia final; por sua vez, g_d^q define a proporção entre células de tipos [1] e [2]. Novamente, as tolerâncias numéricas são dadas por $\varepsilon_p \in \left[\frac{1}{2\hat{N}_t}, \frac{1}{\hat{N}_t} \right]$ e $\varepsilon_q \in \left[\frac{1}{2\hat{N}_t}, \frac{1}{\hat{N}_q} \right]$, com $\hat{N}_q = \sum_e \bar{x}_e$.

No método BESO para o caso macroescala, parte-se de uma topologia inicial viável, $x^{(0)} \in \{0,1\}^{\hat{N}_t}$ e $y^{(0)} \in \{0,1\}^{\hat{N}_t}$, com razões volumétricas $v_p^{(0)}$ e $v_q^{(0)}$. Seguindo o mesmo algoritmo apresentado na seção 3.1, atualiza-se alternadamente cada um dos vetores até a iteração \bar{i} , na qual as restrições volumétricas são cumpridas e a função-objetivo satisfaz o critério de convergência de acordo com os parâmetros n_c e τ :

$$\left| \begin{array}{l} g_d^p(x^{(\bar{i})}) \leq 0 \\ g_d^q(x^{(\bar{i})}, y^{(\bar{i})}) \leq 0 \\ \frac{\sum_{k=0}^{n_c-1} h(x^{(\bar{i}-k)}, y^{(\bar{i}-k)})}{\sum_{k=n_c}^{2n_c-1} h(x^{(\bar{i}-k)}, y^{(\bar{i}-k)})} \leq \tau \end{array} \right. \quad (3.31)$$

Definem-se ER^p e AR^p para controlar quantas células do tipo [3] deve haver em cada iteração; e ER^q e AR^q para controlar a evolução da proporção entre células dos tipos [1] e [2]. Sob as mesmas hipóteses apresentadas para o problema microescala, utilizam-se como números de sensibilidade, $(\alpha^x)_e^a$ e $(\alpha^y)_e^a$, as derivadas das funções-objetivo h em relação às variáveis de projeto:

$$\left| \begin{array}{l} (\alpha^x)_e^a = \frac{\partial h}{\partial x_e} \Leftrightarrow (\alpha^x)^a = \frac{\partial h}{\partial x} \\ (\alpha^y)_e^a = \frac{\partial h}{\partial y_e} \Leftrightarrow (\alpha^y)^a = \frac{\partial h}{\partial y} \end{array} \right. \quad (3.32)$$

Portanto:

$$\left| \begin{array}{l} (\alpha^x)_e^a = \frac{\partial h}{\partial x_e} = \frac{\partial h^*}{\partial x_e} + \left(\frac{\partial h^*}{\partial \hat{a}^R} \right)^T \left(\frac{\partial \hat{a}^R}{\partial x_e} \right) \\ (\alpha^y)_e^a = \frac{\partial h}{\partial y_e} = \frac{\partial h^*}{\partial y_e} + \left(\frac{\partial h^*}{\partial \hat{a}^R} \right)^T \left(\frac{\partial \hat{a}^R}{\partial y_e} \right) \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Por sua vez, tem-se que:

$$\left| \begin{array}{l} \hat{\psi}^R = 0 \\ \Rightarrow \\ \frac{\partial \hat{\psi}^R}{\partial x_e} = \frac{\partial (\hat{\psi}^*)^R}{\partial x_e} + \hat{K}^R \frac{\partial \hat{a}^R}{\partial x_e} = 0 \\ \frac{\partial \hat{\psi}^R}{\partial y_e} = \frac{\partial (\hat{\psi}^*)^R}{\partial y_e} + \hat{K}^R \frac{\partial \hat{a}^R}{\partial y_e} = 0 \\ \Rightarrow \\ \frac{\partial \hat{a}^R}{\partial x_e} = -(\hat{K}^R)^{-1} \frac{\partial (\hat{\psi}^*)^R}{\partial x_e} \\ \frac{\partial \hat{a}^R}{\partial y_e} = -(\hat{K}^R)^{-1} \frac{\partial (\hat{\psi}^*)^R}{\partial y_e} \end{array} \right. \quad (3.34)$$

Logo:

$$\left| \begin{array}{l} (\alpha^x)_e^a = \frac{\partial h^*}{\partial x_e} - \left[(\hat{K}^R)^{-T} \frac{\partial h^*}{\partial \hat{a}^R} \right]^T \left(\frac{\partial (\hat{\psi}^*)^R}{\partial x_e} \right) \\ (\alpha^y)_e^a = \frac{\partial h^*}{\partial y_e} - \left[(\hat{K}^R)^{-T} \frac{\partial h^*}{\partial \hat{a}^R} \right]^T \left(\frac{\partial (\hat{\psi}^*)^R}{\partial y_e} \right) \end{array} \right. \quad (3.35)$$

Dessa maneira, conhecendo-se o objetivo e a influência da topologia em cada termo do resíduo, determinam-se os vetores de sensibilidades através da Equação 3.35.

As etapas de suavização e estabilização são idênticas ao que foi desenvolvido para a microescala. O raio de alcance do filtro, \hat{r}_{\max} , é o mesmo para ambos os vetores de sensibilidade $(\alpha^x)^a$ e $(\alpha^y)^a$. Assim, têm-se a matriz \hat{H}_f de dimensões (\hat{N}_t, \hat{N}_t) tal que:

$$\left| \begin{array}{l} (\alpha^x)^c = \hat{H}_f (\alpha^x)^a \\ (\alpha^y)^c = \hat{H}_f (\alpha^y)^a \end{array} \right. \quad (3.36)$$

Por último, define-se a ponderação $\hat{\beta}$ para a estabilização de $(\alpha^x)^c$ e $(\alpha^y)^c$. Tem-se

na iteração $i > 0$:

$$\begin{cases} [(\alpha^x)^d]^{(i)} = (\hat{\beta}) [(\alpha^x)^c]^{(i)} + (1 - \hat{\beta}) [(\alpha^x)^d]^{(i-1)} \\ [(\alpha^y)^d]^{(i)} = (\hat{\beta}) [(\alpha^y)^c]^{(i)} + (1 - \hat{\beta}) [(\alpha^y)^d]^{(i-1)} \\ [(\alpha^x)^d]^{(0)} = [(\alpha^x)^c]^{(0)} \\ [(\alpha^y)^d]^{(0)} = [(\alpha^y)^c]^{(0)} \end{cases} \quad (3.37)$$

Novamente, adota-se uma abordagem *soft kill*. Sendo os parâmetros $x_{\min} \in]0, 1[$ e $y_{\min} \in]0, 1[$, consideram-se vetores de topologia da forma $x \in \{x_{\min}, 1\}^{\hat{N}_t}$ e $y \in \{y_{\min}, 1\}^{\hat{N}_t}$.

A Figura 3.2 mostra um fluxograma resumindo cada etapa do método BESO para o caso de macroestruturas apresentado nesta seção.

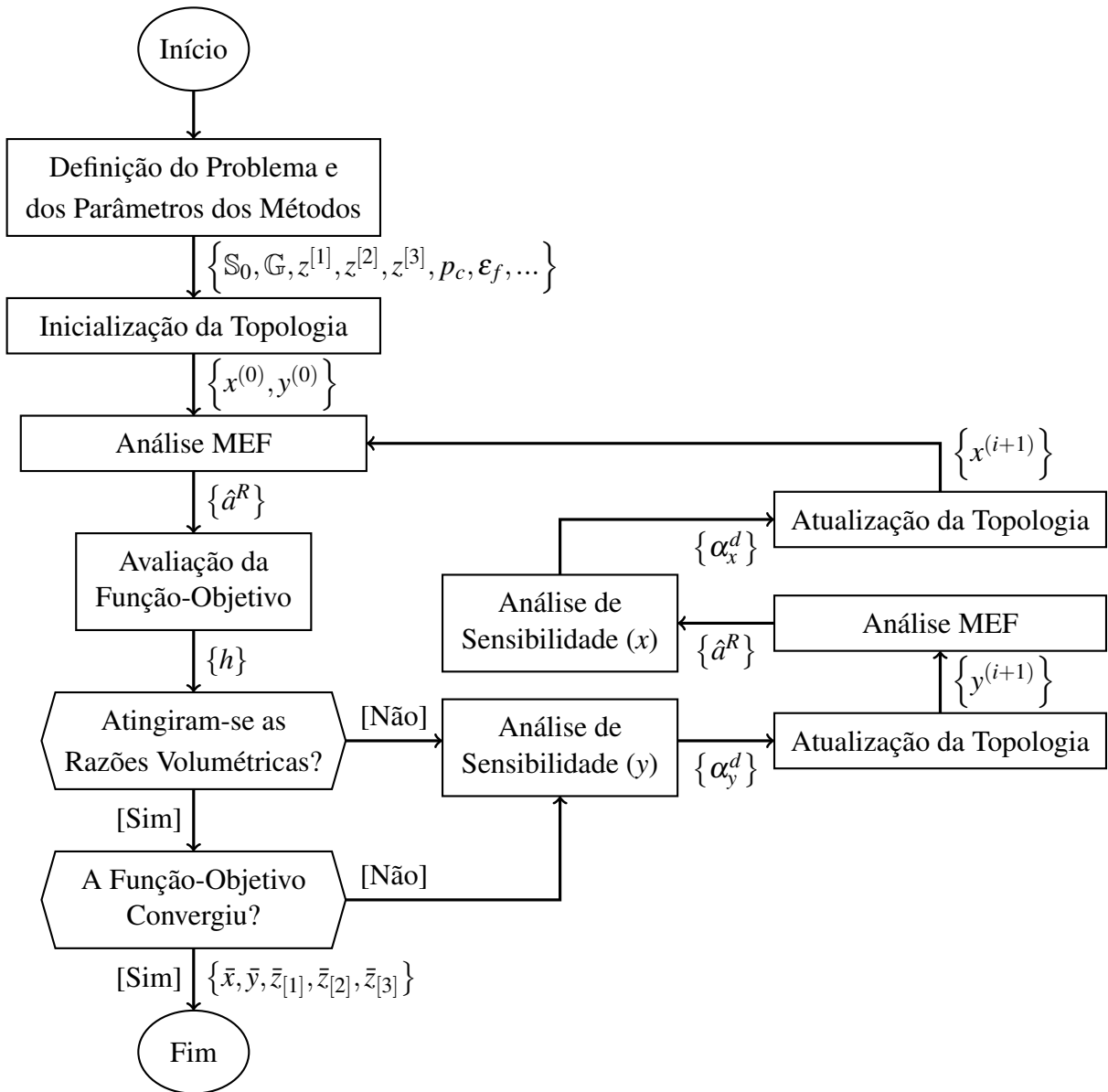


Figura 3.2 – Fluxograma BESO Macroescala

Alguns tipos especiais de células são previstos na implementação: células sólidas, fluidas e vazias. O primeiro tipo é apenas um caso particular do modelo descrito, quando todos os termos do vetor $z^{[.]}$ valem 1. Neste caso, tem-se $E_y^{[.]} = E_y^0$ e $f_c^{[.]} = 0$.

No entanto, as células fluidas não podem ser modeladas como um caso particular no qual os termos de $z^{[.]}$ valem 0, pois isso impossibilitaria a determinação do vetor de deslocamentos dos nós representativos a_c , visto que o sistema da célula isolada com todos os microelementos fluidos diverge. Portanto, adota-se um artifício para a determinação deste tipo de célula. Arbitra-se uma porcentagem elevada de fluido, cria-se uma célula auxiliar com uma cavidade de fluido circular em seu centro, cujo raio garante a razão sólido-fluido definida. A parede celular é imposta neste caso para garantir a convergência do resultado. Com esta célula, obtém-se $E_y^{[.]}$ e $f_c^{[.]}$ seguindo o procedimento apresentado. E então, conhecendo-se o vetor de cargas, atualiza-se $E_y^{[.]}$ para seu valor mínimo. Na abordagem *soft kill*, $E_{\min} = z_{\min}^{p_v} E_y^0$.

Observa-se que quanto maior a porcentagem de fluido atribuída à célula auxiliar, mais ela se aproxima do que seria uma célula fluida no modelo original. Entretanto, caso o valor seja elevado demais, o sistema pode divergir. Após alguns testes, considerou-se 70% um valor adequado para balancear robustez do modelo e qualidade de aproximação.

O último caso corresponde ao caso em que todos os termos de $z^{[.]}$ valem 0 e a pressão p_c é nula. De onde chega-se em $E_y^{[.]} = E_{\min}$ e $f_c^{[.]} = 0$.

Com isso, termina-se a descrição do processo de otimização para o caso macroescala. Para a implementação, resta apenas definir e diferenciar a função-objetivo $h(x, y)$.

3.3 Problema Multiescala

Pode-se então abordar o caso geral, no qual se considera um atuador celular definido pela distribuição de três tipos de células, cujas microtopologias podem variar. Dessa forma, combinando as formulações desenvolvidas para cada escala, deseja-se obter os vetores de topologia x , y , $z^{[1]}$, $z^{[2]}$ e $z^{[3]}$ que maximizam (ou minimizam) a função-objetivo de interesse, $h(x, y, z^{[1]}, z^{[2]}, z^{[3]}) = h^*(x, y, z^{[1]}, z^{[2]}, z^{[3]}, \hat{a}^G(x, y, z^{[1]}, z^{[2]}, z^{[3]}))$, sujeita a restrições. Estabelecem-se restrições que determinam as proporções entre os tipos de célula no macrodomínio e as razões sólido-fluido nos microdomínios. O problema é dado pela Equação 3.38.

A partir daqui, quando ambas as escalas são consideradas, utiliza-se o subscrito (\cdot_e) para indicar elementos da microtopologia e o subscrito (\cdot_E) para elementos da macrotopologia.

$$\left\{ \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}^{[1]}, \bar{z}^{[2]}, \bar{z}^{[3]} \right\} = \underset{x, y, z^{[1]}, z^{[2]}, z^{[3]}}{\text{Max}} \left\{ h^* \left(x, y, z^{[1]}, z^{[2]}, z^{[3]}, \hat{d}^R(x, y, z^{[1]}, z^{[2]}, z^{[3]}) \right) \right\}$$

sujeito a

$$\begin{aligned}
g_d^p(\bar{x}) &= \left| \frac{\sum_E \bar{x}_E}{\hat{N}_t} - v_f^p \right| - \varepsilon_p \leq 0 \\
g_d^q(\bar{x}, \bar{y}) &= \left| \frac{\sum_E \bar{x}_E \bar{y}_E}{\sum_E \bar{x}_E} - v_f^q \right| - \varepsilon_q \leq 0 \\
g_d^{[1]}(\bar{z}^{[1]}) &= \left| \frac{\sum_e \bar{z}_e^{[1]}}{\hat{N}_t} - v_f^{[1]} \right| - \varepsilon_r^{[1]} \leq 0 \\
g_d^{[2]}(\bar{z}^{[2]}) &= \left| \frac{\sum_e \bar{z}_e^{[2]}}{\hat{N}_t} - v_f^{[2]} \right| - \varepsilon_r^{[2]} \leq 0 \\
g_d^{[3]}(\bar{z}^{[3]}) &= \left| \frac{\sum_e \bar{z}_e^{[3]}}{\hat{N}_t} - v_f^{[3]} \right| - \varepsilon_r^{[3]} \leq 0
\end{aligned} \tag{3.38}$$

O algoritmo é o mesmo, parte-se de uma topologia inicial viável, $x^{(0)} \in \{0, 1\}^{\hat{N}_t}$, $y^{(0)} \in \{0, 1\}^{\hat{N}_t}$, $(z^{[1]})^{(0)} \in \{0, 1\}^{\check{N}_t}$, $(z^{[2]})^{(0)} \in \{0, 1\}^{\check{N}_t}$ e $(z^{[3]})^{(0)} \in \{0, 1\}^{\check{N}_t}$, e atualiza-se alternadamente cada um dos vetores até a iteração \bar{i} , na qual se atinge a convergência:

$$\begin{aligned}
g_d^p(x^{(\bar{i})}) &\leq 0 \\
g_d^q(x^{(\bar{i})}, y^{(\bar{i})}) &\leq 0 \\
g_d^{[1]}((z^{[1]})^{(\bar{i})}) &\leq 0 \\
g_d^{[2]}((z^{[2]})^{(\bar{i})}) &\leq 0 \\
g_d^{[3]}((z^{[3]})^{(\bar{i})}) &\leq 0
\end{aligned} \tag{3.39}$$

$$\left| \frac{\sum_{k=0}^{n_c-1} h(x^{(\bar{i}-k)}, y^{(\bar{i}-k)}, (z^{[1]})^{(\bar{i}-k)}, (z^{[2]})^{(\bar{i}-k)}, (z^{[3]})^{(\bar{i}-k)})}{\sum_{k=n_c}^{2n_c-1} h(x^{(\bar{i}-k)}, y^{(\bar{i}-k)}, (z^{[1]})^{(\bar{i}-k)}, (z^{[2]})^{(\bar{i}-k)}, (z^{[3]})^{(\bar{i}-k)})} \right| \leq \tau$$

Os valores de sensibilidade são dados por:

$$\begin{cases}
(\alpha^x)_E^a = \frac{\partial h^*}{\partial x_E} - \left[(\hat{K}^R)^{-T} \frac{\partial h^*}{\partial \hat{a}^R} \right]^T \left(\frac{\partial (\hat{\psi}^*)^R}{\partial x_E} \right) \\
(\alpha^y)_E^a = \frac{\partial h^*}{\partial y_E} - \left[(\hat{K}^R)^{-T} \frac{\partial h^*}{\partial \hat{a}^R} \right]^T \left(\frac{\partial (\hat{\psi}^*)^R}{\partial y_E} \right) \\
(\alpha^{z^{[1]}})_e^a = \frac{\partial h^*}{\partial z_e^{[1]}} - \left[(\hat{K}^R)^{-T} \frac{\partial h^*}{\partial \hat{a}^R} \right]^T \left(\frac{\partial (\hat{\psi}^*)^R}{\partial z_e^{[1]}} \right) \\
(\alpha^{z^{[2]}})_e^a = \frac{\partial h^*}{\partial z_e^{[2]}} - \left[(\hat{K}^R)^{-T} \frac{\partial h^*}{\partial \hat{a}^R} \right]^T \left(\frac{\partial (\hat{\psi}^*)^R}{\partial z_e^{[2]}} \right) \\
(\alpha^{z^{[3]}})_e^a = \frac{\partial h^*}{\partial z_e^{[3]}} - \left[(\hat{K}^R)^{-T} \frac{\partial h^*}{\partial \hat{a}^R} \right]^T \left(\frac{\partial (\hat{\psi}^*)^R}{\partial z_e^{[3]}} \right)
\end{cases} \quad (3.40)$$

Os vetores $(\alpha^x)^a$ e $(\alpha^y)^a$ passam pelo procedimento de suavização e estabilização utilizando os parâmetros da macroescala \hat{r}_{\max} e $\hat{\beta}$. Para os vetores $(\alpha^{z^{[1]}})^a$, $(\alpha^{z^{[2]}})^a$ e $(\alpha^{z^{[3]}})^a$, utilizam-se os parâmetros da microescala \check{r}_{\max} e $\check{\beta}$.

Como nos casos anteriores, adota-se uma abordagem *soft kill*, com valores mínimos x_{\min} , y_{\min} , $z_{\min}^{[1]}$, $z_{\min}^{[2]}$ e $z_{\min}^{[3]}$.

Utilizam-se mais dois parâmetros para definir quando se deve alternar a escala do processo de otimização: o número de iterações n_M em que apenas a macrotopologia é alterada e o número de iterações n_μ em que apenas as microtopologias são alteradas. O programa executa n_M iterações atualizando apenas x e y , em seguida n_μ iterações atualizando apenas $z^{[1]}$, $z^{[2]}$ e $z^{[3]}$; esse processo é repetido até a convergência.

Nesta implementação, atualizam-se as três microtopologias $z^{[1]}$, $z^{[2]}$ e $z^{[3]}$ simultaneamente, sob a hipótese de que, numa única iteração, a alteração de cada célula não causa mudanças relevantes nos vetores de sensibilidades das outras (os valores de ER e AR podem ser calibrados para que isso seja plausível).

A Figura 3.3 mostra um fluxograma resumindo cada etapa do método BESO para o caso multiescala.

Também foi prevista a possibilidade de otimizar somente a macrotopologia (x e y) ou somente a microtopologia ($z^{[1]}$, $z^{[2]}$ e $z^{[3]}$), assim como otimizar apenas uma célula específica ($z^{[2]}$ por exemplo). Células sólidas, fluidas ou vazias têm topologias fixas e não são otimizadas.

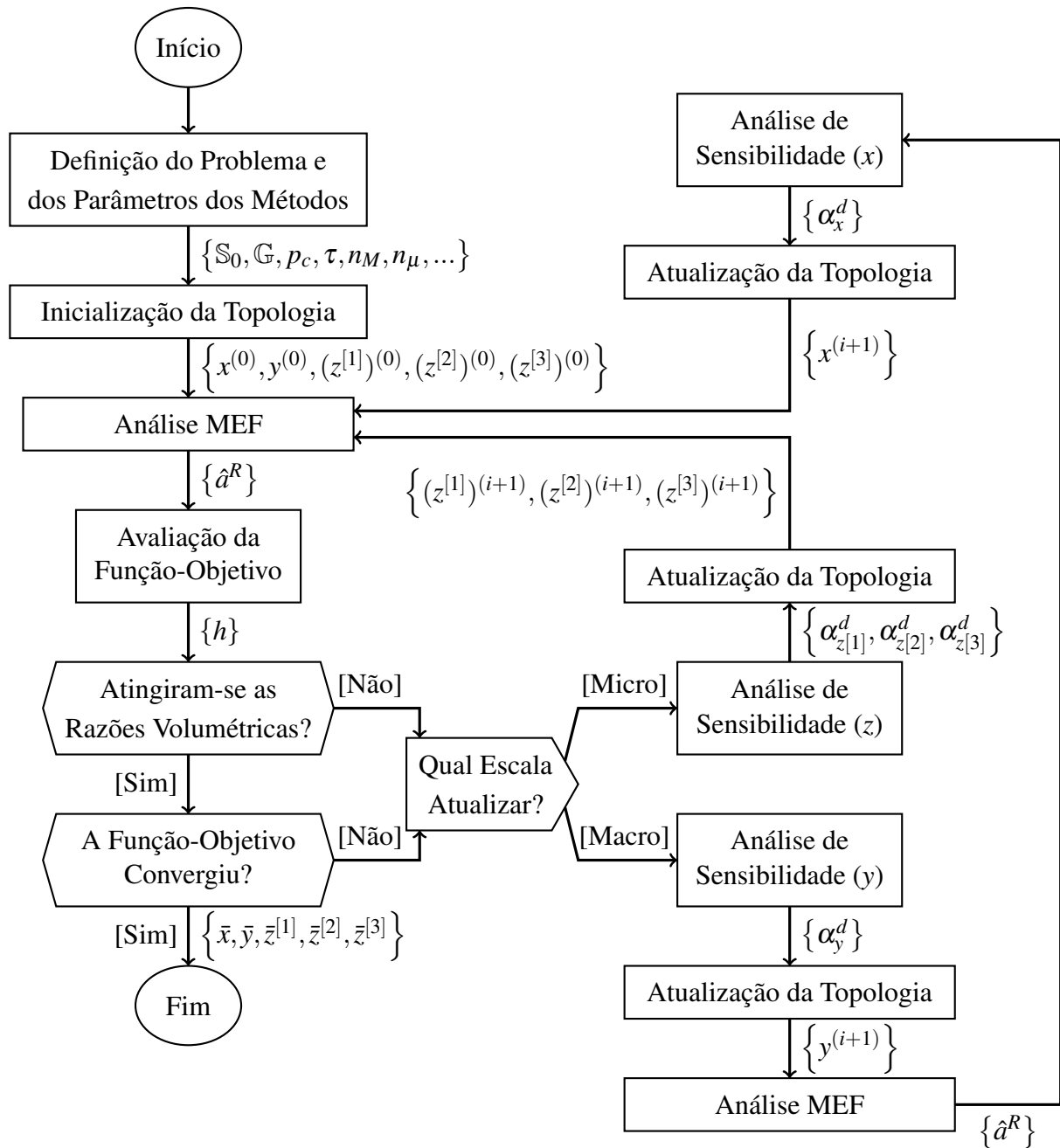


Figura 3.3 – Fluxograma BESO Multiescala

3.4 Concepção do Fluidoatuador Celular

Deseja-se definir funções-objetivo que representem a qualidade dos fluidoatuadores celulares. Estas serão maximizadas, pelo processo de otimização topológica descrito, afim de conceber soluções eficazes para diferentes problemas. Propostas naturais são: uma medida que represente a amplitude de atuação do mecanismo e uma medida que represente a eficiência energética dessa atuação. Respectivamente, tem-se o trabalho útil h_o , que corresponde à energia transmitida às molas-objetivo pela atuação do mecanismo; e transmitância mecânica h_t , que corresponde à razão entre o trabalho útil e a energia total transmitida ao sistema pelas cargas de pressão e forças externas aplicadas.

A energia de deformação de cada elemento é dada pela integração da densidade de energia (Equação 2.42) em seu volume \mathbb{X}_0 , assim, a energia de deformação da estrutura W_s é dada por:

$$W_s = \sum_e (W_s)_e = \sum_e \left(\int_{\mathbb{X}_0} \frac{1}{2} T : E dV_{\mathbb{X}_0} \right)_e \quad (3.41)$$

As energias de deformação W_{ks} , referente às molas apenas estruturais, e W_{kh} , referente às molas objetivo, são dadas por:

$$\begin{cases} W_{ks} = \frac{1}{2} a^G \cdot K_{ks}^G \cdot a^G = \frac{1}{2} a^R \cdot K_{ks}^R \cdot a^R \\ W_{kh} = \frac{1}{2} a^G \cdot K_{kh}^G \cdot a^G = \frac{1}{2} a^R \cdot K_{kh}^R \cdot a^R \end{cases} \quad (3.42)$$

Pelo princípio de conservação de energia, sob as hipóteses de que não há irreversibilidades no processo, a energia total transmitida pelas cargas de pressão e forças externas aplicadas W_t deve ser igual à energia de deformação total do sistema:

$$W_t = W_s + W_{ks} + W_{kh} \quad (3.43)$$

Assim, as funções h_o e h_t podem ser escritas como:

$$\begin{cases} h_o = W_{kh} \\ h_t = \frac{W_{kh}}{W_t} \end{cases} \quad (3.44)$$

Com isso, pode-se realizar a análise de sensibilidade para cada um dos casos descritos. Considerando o problema microescala, pode-se usar a Equação 3.17 para obter um vetor de sensibilidades para cada uma dessas funções.

Sendo T_S o tensor de tensões considerando o microelemento como sólido, tem-se:

$$W_s = \sum_e \gamma_s(z_e)(W_s)_e = \sum_e \gamma_s(z_e) \left(\int_{\mathbb{X}_0} \frac{1}{2} T_S : E dV_{\mathbb{X}_0} \right)_e \quad (3.45)$$

Assim como as integrais anteriores, a integração volumétrica é avaliada numericamente, pela quadratura de Gauss.

A derivada parcial do resíduo em relação à topologia é dada por:

$$\frac{\partial(\check{\Psi}^*)^R}{\partial z_e} = \frac{\partial \gamma_s}{\partial z_e} \check{W}_e(\check{\Psi}_S)_e - \frac{\partial \gamma_p}{\partial z_e} \check{W}_e(\check{\Psi}_P)_e \quad (3.46)$$

Sendo $h_o(z) = h_o^*(z, \check{\alpha}^R(z))$, as derivadas da função-objetivo são:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial h_o^*}{\partial z_e} = 0 \\ \frac{\partial h_o^*}{\partial \check{\alpha}^R} = \check{K}_{kh}^R \cdot \check{\alpha}^R = \check{\Psi}_{kh}^R \end{array} \right. \quad (3.47)$$

Logo, o número de sensibilidade $(\alpha_o)_e^a$ referente a h_o é dado por:

$$(\alpha_o)_e^a = - [(\check{K}^R)^{-1} \check{\Psi}_{kh}^R]^T \left(\frac{\partial \gamma_s}{\partial z_e} \check{W}_e(\check{\Psi}_S)_e - \frac{\partial \gamma_p}{\partial z_e} \check{W}_e(\check{\Psi}_P)_e \right) \quad (3.48)$$

Observa-se que é necessário resolver um sistema linear para a obtenção do vetor $(\alpha_o)^a$:

$$\left| \begin{array}{l} (\alpha_o)_e^a = - [\check{W}_e^T w_o]^T \left(\frac{\partial \gamma_s}{\partial z_e} (\check{\Psi}_S)_e - \frac{\partial \gamma_p}{\partial z_e} (\check{\Psi}_P)_e \right) \\ w_o = (\check{K}^R)^{-1} \check{\Psi}_{kh}^R \end{array} \right. \quad (3.49)$$

O vetor w_o é o mesmo para todos os elementos e a matriz \check{W}_e reduz a dimensão do vetor. Assim, após obter w_o , apenas opera-se com vetores de dimensão (8): $(\check{W}_e^T w_o)$, $(\check{\Psi}_S)_e$ e $(\check{\Psi}_P)_e$.

Por sua vez, sendo $h_t(z) = h_t^*(z, \check{\alpha}^R(z))$:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial h_t^*}{\partial z_e} = - \frac{W_{kh}}{W_t^2} \frac{\partial \gamma_s}{\partial z_e} (W_s)_e \\ \frac{\partial h_t^*}{\partial \check{\alpha}^R} = \frac{W_s + W_{ks}}{W_t^2} \check{\Psi}_{kh}^R - \frac{W_{kh}}{W_t^2} (\check{\Psi}_s^R + \check{\Psi}_{ks}^R) \end{array} \right. \quad (3.50)$$

Com isso, o número de sensibilidade $(\alpha_t)_e^a$ referente a h_t é dado por:

$$\begin{cases} (\alpha_t)_e^a = -\frac{W_{kh}}{W_t^2} \frac{\partial \gamma_s}{\partial z_e} (W_s)_e - [\check{W}_e^T w_t]^T \left(\frac{\partial \gamma_s}{\partial z_e} (\check{\Psi}_s)_e - \frac{\partial \gamma_p}{\partial z_e} (\check{\Psi}_p)_e \right) \\ w_t = (\check{K}^R)^{-1} \left(\frac{W_s + W_{ks}}{W_t^2} \check{\Psi}_{kh}^R - \frac{W_{kh}}{W_t^2} (\check{\Psi}_s^R + \check{\Psi}_{ks}^R) \right) \end{cases} \quad (3.51)$$

Novamente, tem-se um único vetor w_t para todos os elementos e opera-se com vetores de dimensão (8): $(\check{W}_e^T w_t)$, $(\check{\Psi}_s)_e$ e $(\check{\Psi}_p)_e$.

Para determinar completamente os vetores de sensibilidades, é preciso explicitar as funções interpoladoras γ_s e γ_p . Neste trabalho, utilizou-se o modelo SIMP, com expoentes reais positivos p_s e p_p :

$$\begin{cases} \gamma_s(z_e) = z_e^{p_s} \\ \gamma_p(z_e) = 1 - z_e^{p_p} \end{cases} \quad (3.52)$$

A Figura 3.4 apresenta o comportamento assumido para valores intermediários de z_e para cada função de penalização. Observa-se que quanto menor o expoente, menor deve ser z_{\min} para que os elementos com $z_e = z_{\min}$ comportem-se aproximadamente como se $z_e = 0$. Tanto z_{\min} quanto os expoentes influenciam nos valores das derivada de γ_s e γ_p utilizados na análise de sensibilidade, portanto, na definição desses parâmetros, deve-se também levar em conta suas influências sobre a convergência do método de otimização.

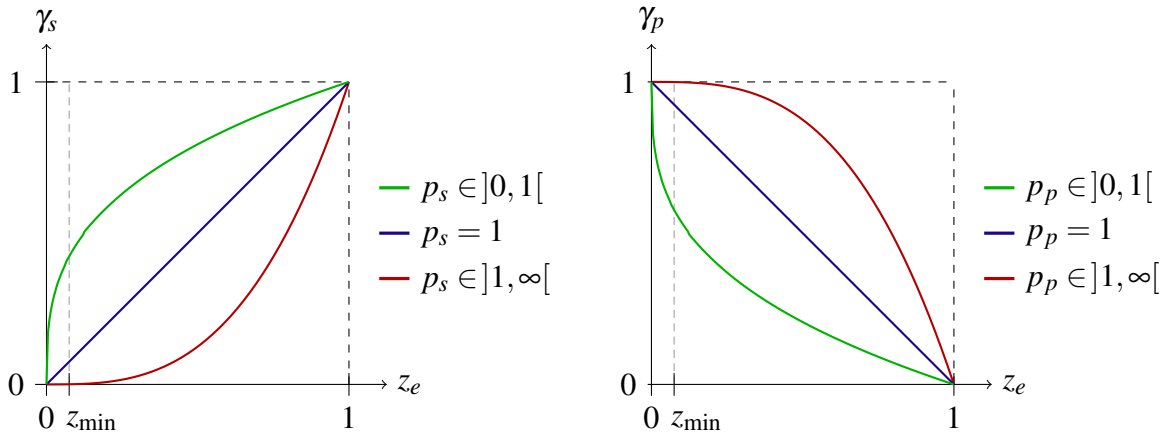


Figura 3.4 – Curvas de Penalização

Adicionando o modelo de interpolação, obtém-se a seguinte expressão para $(\alpha_o)_e^a$:

$$\begin{cases} (\alpha_o)_e^a = -[W_e^T w_o]^T \left(p_s z_e^{p_s-1} (\check{\Psi}_s)_e + p_p z_e^{p_p-1} (\check{\Psi}_p)_e \right) \\ w_o = (\check{K}^R)^{-1} \check{\Psi}_{kh}^R \end{cases} \quad (3.53)$$

Por sua vez, $(\alpha_t)_e^a$ é dado por:

$$\begin{cases} (\alpha_t)_e^a = -\frac{W_{kh}}{W_t^2} p_s z_e^{p_s-1} (W_S)_e - [W_e^T w_t]^T \left(p_s z_e^{p_s-1} (\check{\Psi}_S)_e + p_p z_e^{p_p-1} (\check{\Psi}_P)_e \right) \\ w_t = (\check{K}^R)^{-1} \left(\frac{W_s + W_{ks}}{W_t^2} \check{\Psi}_{kh}^R - \frac{W_{kh}}{W_t^2} (\check{\Psi}_s^R + \check{\Psi}_{ks}^R) \right) \end{cases} \quad (3.54)$$

Como mencionado, no algoritmo de otimização, esses valores são utilizados apenas comparativamente, portanto, pode-se utilizar $(\alpha_t^*)_e^a = W_t^2 (\alpha_t)_e^a$ como número de sensibilidade.

$$\begin{cases} (\alpha_t^*)_e^a = -W_{kh} p_s z_e^{p_s-1} (W_S)_e - [W_e^T w_t^*]^T \left(p_s z_e^{p_s-1} (\check{\Psi}_S)_e + p_p z_e^{p_p-1} (\check{\Psi}_P)_e \right) \\ w_t^* = (\check{K}^R)^{-1} \left((W_s + W_{ks}) \check{\Psi}_{kh}^R - W_{kh} (\check{\Psi}_s^R + \check{\Psi}_{ks}^R) \right) \end{cases} \quad (3.55)$$

Assim, definindo todos os parâmetros necessários, a Equação 3.53 e a Equação 3.55 podem ser usadas no método BESO para a obtenção de estruturas otimizadas, respectivamente com trabalho útil maximizado, ou transmitância mecânica maximizada.

Com o intuito de validar a implementação do método de otimização, incluiu-se o problema icônico de maximização de rigidez de uma estrutura estática. Para isso, consideram-se molas apenas estruturais, define-se a pressão aplicada como $p_c = 0$ e utiliza-se a *compliance* média (energia de deformação total), h_c , como função-objetivo a ser minimizada. Dessa forma, o vetor de topologia define quais elementos são sólidos ($z_e = 1$) e quais elementos são vazios ($z_e = z_{\min}$). Tem-se $(\check{\Psi}_P)_e = 0$, $\check{K}_{kh} = 0$ e $\check{\Psi}_{kh} = 0$.

$$h_c = W_s \quad (3.56)$$

Para não ser necessário alterar o programa (que maximiza as funções), inverte-se o sinal da derivada de h_c para definir o número de sensibilidade neste caso:

$$\begin{cases} (\alpha_c)_e^a = -\frac{\partial h_c}{\partial z_e} = -\frac{\partial \gamma_s}{\partial z_e} (W_S)_e + [W_e^T w_c]^T \left(\frac{\partial \gamma_s}{\partial z_e} (\check{\Psi}_S)_e \right) \\ w_c = (\check{K}^R)^{-1} \check{\Psi}_s^R \end{cases} \quad (3.57)$$

Substituindo γ_s (Equação 3.52), obtém-se:

$$\begin{cases} (\alpha_c)_e^a = -p_s z_e^{p_s-1} (W_S)_e + [W_e^T w_c]^T \left(p_s z_e^{p_s-1} (\check{\Psi}_S)_e \right) \\ w_c = (\check{K}^R)^{-1} \check{\Psi}_s^R \end{cases} \quad (3.58)$$

Aqui, pode-se utilizar $(\alpha_c^*)_e = \frac{1}{p_s} (\alpha_c)_e^a$ como número de sensibilidade:

$$\begin{cases} (\alpha_c^*)_e = -z_e^{p_s-1} (W_S)_e + [W_e^T w_c]^T (z_e^{p_s-1} (\psi_S)_e) \\ w_c = (\check{K}^R)^{-1} \check{\psi}_s^R \end{cases} \quad (3.59)$$

Considerando o problema macroescala, utiliza-se a Equação 3.35 para se obter os vetores de sensibilidade para cada função-objetivo.

Sendo T_S o tensor de tensões considerando o macroelemento como sólido, tem-se:

$$\begin{aligned} W_S = \sum_E \left(\gamma_s^x \gamma_s^y (v^{[1]})^{p_v} + \gamma_s^x (1 - \gamma_s^y) (v^{[2]})^{p_v} + (1 - \gamma_s^x) (v^{[3]})^{p_v} \right) (W_S)_E = \\ \sum_E \left(\gamma_s^x \gamma_s^y (v^{[1]})^{p_v} + \gamma_s^x (1 - \gamma_s^y) (v^{[2]})^{p_v} + (1 - \gamma_s^x) (v^{[3]})^{p_v} \right) \left(\int_{\mathbb{X}_0} \frac{1}{2} T_S : E dV_{\mathbb{X}_0} \right)_E \end{aligned} \quad (3.60)$$

Onde γ_s^x depende de x_E , γ_s^y depende de y_E e cada $v^{[.]}$ é dado por sua microtopologia correspondente, $z^{[.]}$.

As energias de deformação W_{ks} , referente às molas apenas estruturais, e W_{kh} , referente às molas objetivo, são dadas por:

$$\begin{cases} W_{ks} = \frac{1}{2} \hat{a}^G \cdot \hat{K}_{ks}^G \cdot \hat{a}^G = \frac{1}{2} \hat{a}^R \cdot \hat{K}_{ks}^R \cdot \hat{a}^R \\ W_{kh} = \frac{1}{2} \hat{a}^G \cdot \hat{K}_{kh}^G \cdot \hat{a}^G = \frac{1}{2} \hat{a}^R \cdot \hat{K}_{kh}^R \cdot \hat{a}^R \end{cases} \quad (3.61)$$

Utilizam-se as mesmas funções-objetivo: trabalho útil h_o e transmitância mecânica h_t . Dadas pela Equação 3.44.

As derivadas do resíduo são dadas por:

$$\begin{cases} \frac{\partial (\hat{\psi}^*)^R}{\partial x_E} = W_E \left[\left(\frac{\partial \gamma_s^x}{\partial x_E} \gamma_s^y (v^{[1]})^{p_v} + \frac{\partial \gamma_s^x}{\partial x_E} (1 - \gamma_s^y) (v^{[2]})^{p_v} - \frac{\partial \gamma_s^x}{\partial x_E} (v^{[3]})^{p_v} \right) (\hat{\psi}_S)_E \right. \\ \quad \left. - \bar{R}_E^A \left(\frac{\partial \gamma_p^x}{\partial x_E} \gamma_p^y \bar{f}_c^{[1]} + \frac{\partial \gamma_p^x}{\partial x_E} (1 - \gamma_p^y) \bar{f}_c^{[2]} - \frac{\partial \gamma_p^x}{\partial x_E} \bar{f}_c^{[3]} \right) \right] = W_E \Upsilon_E^x \\ \frac{\partial (\hat{\psi}^*)^R}{\partial y_E} = W_E \left[\left(\gamma_s^x \frac{\partial \gamma_s^y}{\partial y_E} (v^{[1]})^{p_v} - \gamma_s^x \frac{\partial \gamma_s^y}{\partial y_E} (v^{[2]})^{p_v} \right) (\hat{\psi}_S)_E \right. \\ \quad \left. - \bar{R}_E^A \left(\gamma_p^x \frac{\partial \gamma_p^y}{\partial y_E} \bar{f}_c^{[1]} - \gamma_p^x \frac{\partial \gamma_p^y}{\partial y_E} \bar{f}_c^{[2]} \right) \right] = W_E \Upsilon_E^y \end{cases} \quad (3.62)$$

Sendo $h_o(x, y) = h_o^*(x, y, \hat{a}^R(x, y))$:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial h_o^*}{\partial x_E} = 0 \\ \frac{\partial h_o^*}{\partial y_E} = 0 \\ \frac{\partial h_o^*}{\partial \hat{a}^R} = \hat{K}_{kh}^R \cdot \hat{a}^R = \hat{\psi}_{kh}^R \end{array} \right. \quad (3.63)$$

Com isso, os números de sensibilidade $(\alpha_o^x)_E^a$ e $(\alpha_o^y)_E^a$, referentes a h_o , são dados por:

$$\left| \begin{array}{l} (\alpha_o^x)_E^a = - \left[(\hat{K}^R)^{-T} \hat{\psi}_{kh}^R \right]^T (W_E \Upsilon_E^x) \\ (\alpha_o^y)_E^a = - \left[(\hat{K}^R)^{-T} \hat{\psi}_{kh}^R \right]^T (W_E \Upsilon_E^y) \end{array} \right. \quad (3.64)$$

Separando os termos tem-se:

$$\left| \begin{array}{l} (\alpha_o^x)_E^a = - [W_E^T w_o]^T (\Upsilon_E^x) \\ (\alpha_o^y)_E^a = - [W_E^T w_o]^T (\Upsilon_E^y) \\ w_o = (\hat{K}^R)^{-T} \hat{\psi}_{kh}^R \end{array} \right. \quad (3.65)$$

Por sua vez, sendo $h_t(x, y) = h_t^*(x, y, \hat{a}^R(x, y))$:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{\partial h_t^*}{\partial x_E} = - \frac{W_{kh}}{W_t^2} \left(\frac{\partial \gamma_s^x}{\partial x_E} \gamma_s^y (v^{[1]})^{p_v} + \frac{\partial \gamma_s^x}{\partial x_E} (1 - \gamma_s^y) (v^{[2]})^{p_v} - \frac{\partial \gamma_s^x}{\partial x_E} (v^{[3]})^{p_v} \right) (W_S)_E \\ \frac{\partial h_t^*}{\partial y_E} = - \frac{W_{kh}}{W_t^2} \left(\gamma_s^x \frac{\partial \gamma_s^y}{\partial y_E} (v^{[1]})^{p_v} - \gamma_s^x \frac{\partial \gamma_s^y}{\partial y_E} (v^{[2]})^{p_v} \right) (W_S)_E \\ \frac{\partial h_t^*}{\partial \hat{a}^R} = \frac{W_s + W_{ks}}{W_t^2} \hat{\psi}_{kh}^R - \frac{W_{kh}}{W_t^2} (\hat{\psi}_s^R + \hat{\psi}_{ks}^R) \end{array} \right. \quad (3.66)$$

Assim, os números de sensibilidade $(\alpha_t^x)_E^a$ e $(\alpha_t^y)_E^a$, referentes a h_t , são dados por:

$$\left| \begin{array}{l} (\alpha_t^x)_E^a = - \frac{W_{kh}}{W_t^2} \frac{\partial \gamma_s^x}{\partial x_E} \left(\gamma_s^y (v^{[1]})^{p_v} + (1 - \gamma_s^y) (v^{[2]})^{p_v} - (v^{[3]})^{p_v} \right) (W_S)_E \\ \quad - [W_E^T w_t]^T (\Upsilon_E^x) \\ (\alpha_t^y)_E^a = - \frac{W_{kh}}{W_t^2} \gamma_s^x \frac{\partial \gamma_s^y}{\partial y_E} \left((v^{[1]})^{p_v} - (v^{[2]})^{p_v} \right) (W_S)_E \\ \quad - [W_E^T w_t]^T (\Upsilon_E^y) \\ w_t = (\hat{K}^R)^{-T} \left(\frac{W_s + W_{ks}}{W_t^2} \hat{\psi}_{kh}^R - \frac{W_{kh}}{W_t^2} (\hat{\psi}_s^R + \hat{\psi}_{ks}^R) \right) \end{array} \right. \quad (3.67)$$

Aqui, também utilizou-se o modelo SIMP para determinar as funções γ_s^x , γ_p^x , γ_s^y e γ_p^y , com expoentes reais positivos p_s^x , p_p^x , p_s^y , p_p^y :

$$\begin{cases} \gamma_s^x(x_E) = x_E^{p_s^x} \\ \gamma_p^x(x_E) = x_E^{p_p^x} \\ \gamma_s^y(y_E) = y_E^{p_s^y} \\ \gamma_p^y(y_E) = y_E^{p_p^y} \end{cases} \quad (3.68)$$

Para validar a implementação macroescala, incluiu-se também o problema de maximização de rigidez da estrutura. Para isso, define-se a pressão na microescala como $p_c = 0$ ($f_c^{[.]} = 0$ para todas as células) e utiliza-se a *compliance* média h_c como função a ser minimizada. Sem as cargas $f_c^{[.]}$ no modelo, a matriz tangente volta a ser simétrica. Para cada célula, atribui-se um valor $v^{[.]}$ para representar materiais com diferentes valores de rigidez $E_y^{[.]}$.

Nessas condições, a Equação 3.62 reduz-se a:

$$\begin{cases} \frac{\partial(\hat{\psi}^*)^R}{\partial x_E} = W_E \left[\left(\frac{\partial \gamma_s^x}{\partial x_E} \gamma_s^y (v^{[1]})^{p_v} + \frac{\partial \gamma_s^x}{\partial x_E} (1 - \gamma_s^y) (v^{[2]})^{p_v} - \frac{\partial \gamma_s^x}{\partial x_E} (v^{[3]})^{p_v} \right) (\hat{\psi}_S)_E \right] = W_E \Upsilon_E^x \\ \frac{\partial(\hat{\psi}^*)^R}{\partial y_E} = W_E \left[\left(\gamma_s^x \frac{\partial \gamma_s^y}{\partial y_E} (v^{[1]})^{p_v} - \gamma_s^x \frac{\partial \gamma_s^y}{\partial y_E} (v^{[2]})^{p_v} \right) (\hat{\psi}_S)_E \right] = W_E \Upsilon_E^y \end{cases} \quad (3.69)$$

As derivadas de h_c são dadas por:

$$\begin{cases} \frac{\partial h_c^*}{\partial x_E} = \left(\frac{\partial \gamma_s^x}{\partial x_E} \gamma_s^y (v^{[1]})^{p_v} + \frac{\partial \gamma_s^x}{\partial x_E} (1 - \gamma_s^y) (v^{[2]})^{p_v} - \frac{\partial \gamma_s^x}{\partial x_E} (v^{[3]})^{p_v} \right) (W_S)_E \\ \frac{\partial h_c^*}{\partial y_E} = \left(\gamma_s^x \frac{\partial \gamma_s^y}{\partial y_E} (v^{[1]})^{p_v} - \gamma_s^x \frac{\partial \gamma_s^y}{\partial y_E} (v^{[2]})^{p_v} \right) (W_S)_E \end{cases} \quad (3.70)$$

Novamente, para não alterar o programa, invertem-se os sinais dessas derivadas para definir os números de sensibilidade, dados por:

$$\begin{cases} (\alpha_c^x)_E^a = -\frac{\partial h_c}{\partial x_E} = -\frac{\partial h_c^*}{\partial x_E} - [W_E^T w_c]^T (\Upsilon_E^x) \\ (\alpha_c^y)_E^a = -\frac{\partial h_c}{\partial y_E} = -\frac{\partial h_c^*}{\partial y_E} - [W_E^T w_c]^T (\Upsilon_E^y) \\ w_c = (\hat{K}^R)^{-T} \hat{\psi}_s^R \end{cases} \quad (3.71)$$

Enfim, no modelo multiescala, os vetores de sensibilidade para cada função-objetivo são dados pela Equação 3.40. Os termos relativos aos vetores x e y são idênticos aos obtidos no

modelo macroescala. Assim, resta apenas avaliar os termos relativos aos vetores $z^{[1]}$, $z^{[2]}$ e $z^{[3]}$.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(\hat{\psi}^*)^R}{\partial z_e^{[1]}} \right| &= \sum_E W_E \left[\left(\gamma_s^x \gamma_s^y \frac{\partial(v^{[1]})^{p_v}}{\partial z_e^{[1]}} \right) (\hat{\psi}_S)_E - \bar{R}_E^A \left(\gamma_p^x \gamma_p^y \frac{\partial \bar{f}_c^{[1]}}{\partial z_e^{[1]}} \right) \right] = \sum_E W_E \Upsilon_E^{z^{[1]}} \\ \left| \frac{\partial(\hat{\psi}^*)^R}{\partial z_e^{[2]}} \right| &= \sum_E W_E \left[\left(\gamma_s^x (1 - \gamma_s^y) \frac{\partial(v^{[2]})^{p_v}}{\partial z_e^{[2]}} \right) (\hat{\psi}_S)_E - \bar{R}_E^A \left(\gamma_p^x (1 - \gamma_p^y) \frac{\partial \bar{f}_c^{[2]}}{\partial z_e^{[2]}} \right) \right] = \sum_E W_E \Upsilon_E^{z^{[2]}} \\ \left| \frac{\partial(\hat{\psi}^*)^R}{\partial z_e^{[3]}} \right| &= \sum_E W_E \left[\left((1 - \gamma_s^x) \frac{\partial(v^{[3]})^{p_v}}{\partial z_e^{[3]}} \right) (\hat{\psi}_S)_E - \bar{R}_E^A \left((1 - \gamma_p^x) \frac{\partial \bar{f}_c^{[3]}}{\partial z_e^{[3]}} \right) \right] = \sum_E W_E \Upsilon_E^{z^{[3]}} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Sendo $h_o(x, y, z^{[1]}, z^{[2]}, z^{[3]}) = h_o^*(x, y, z^{[1]}, z^{[2]}, z^{[3]}, \hat{a}^R(x, y, z^{[1]}, z^{[2]}, z^{[3]}))$, além das relações apresentadas na Equação 3.63, tem-se:

$$\left| \begin{aligned} \frac{\partial h_o^*}{\partial z_e^{[1]}} &= 0 \\ \frac{\partial h_o^*}{\partial z_e^{[2]}} &= 0 \\ \frac{\partial h_o^*}{\partial z_e^{[3]}} &= 0 \end{aligned} \right. \quad (3.73)$$

Os números de sensibilidade $(\alpha_o^x)_E^a$ e $(\alpha_o^y)_E^a$ são os mesmos da Equação 3.65, enquanto $(\alpha_o^{z^{[1]}})_e^a$, $(\alpha_o^{z^{[2]}})_e^a$ e $(\alpha_o^{z^{[3]}})_e^a$ são dados por:

$$\left| \begin{aligned} (\alpha_o^{z^{[1]}})_e^a &= - \left[(\hat{K}^R)^{-T} \hat{\psi}_{kh}^R \right]^T \left(\sum_E W_E \Upsilon_E^{z^{[1]}} \right) \\ (\alpha_o^{z^{[2]}})_e^a &= - \left[(\hat{K}^R)^{-T} \hat{\psi}_{kh}^R \right]^T \left(\sum_E W_E \Upsilon_E^{z^{[2]}} \right) \\ (\alpha_o^{z^{[3]}})_e^a &= - \left[(\hat{K}^R)^{-T} \hat{\psi}_{kh}^R \right]^T \left(\sum_E W_E \Upsilon_E^{z^{[3]}} \right) \end{aligned} \right. \quad (3.74)$$

Alternativamente:

$$\left| \begin{aligned} (\alpha_o^{z^{[1]}})_e^a &= - [w_o]^T \left(\sum_E W_E \Upsilon_E^{z^{[1]}} \right) \\ (\alpha_o^{z^{[2]}})_e^a &= - [w_o]^T \left(\sum_E W_E \Upsilon_E^{z^{[2]}} \right) \\ (\alpha_o^{z^{[3]}})_e^a &= - [w_o]^T \left(\sum_E W_E \Upsilon_E^{z^{[3]}} \right) \\ w_o &= (\hat{K}^R)^{-T} \hat{\psi}_{kh}^R \end{aligned} \right. \quad (3.75)$$

Por sua vez, sendo $h_t(x, y, z^{[1]}, z^{[2]}, z^{[3]}) = h_t^*(x, y, z^{[1]}, z^{[2]}, z^{[3]}, \hat{a}^R(x, y, z^{[1]}, z^{[2]}, z^{[3]}))$, as derivadas em relação aos vetores das microtopologias valem:

$$\begin{cases} \frac{\partial h_t^*}{\partial z_e^{[1]}} = -\frac{W_{kh}}{W_t^2} \left(\sum_E \gamma_s^x \gamma_s^y \frac{\partial (v^{[1]})^{p_v}}{\partial z_e^{[1]}} (W_S)_E \right) \\ \frac{\partial h_t^*}{\partial z_e^{[2]}} = -\frac{W_{kh}}{W_t^2} \left(\sum_E \gamma_s^x (1 - \gamma_s^y) \frac{\partial (v^{[2]})^{p_v}}{\partial z_e^{[2]}} (W_S)_E \right) \\ \frac{\partial h_t^*}{\partial z_e^{[3]}} = -\frac{W_{kh}}{W_t^2} \left(\sum_E (1 - \gamma_s^x) \frac{\partial (v^{[3]})^{p_v}}{\partial z_e^{[3]}} (W_S)_E \right) \end{cases} \quad (3.76)$$

Os números de sensibilidade $(\alpha_t^x)_E^a$ e $(\alpha_t^y)_E^a$ são os mesmos da Equação 3.67, enquanto $(\alpha_t^{z[1]})_e^a$, $(\alpha_t^{z[2]})_e^a$ e $(\alpha_t^{z[3]})_e^a$ são dados por:

$$\begin{cases} (\alpha_t^{z[1]})_e^a = -\frac{W_{kh}}{W_t^2} \frac{\partial (v^{[1]})^{p_v}}{\partial z_e^{[1]}} \left(\sum_E \gamma_s^x \gamma_s^y (W_S)_E \right) - [w_t]^T \sum_e (w_e \Upsilon_e^{z[1]}) \\ (\alpha_t^{z[2]})_e^a = -\frac{W_{kh}}{W_t^2} \frac{\partial (v^{[2]})^{p_v}}{\partial z_e^{[2]}} \left(\sum_E \gamma_s^x (1 - \gamma_s^y) (W_S)_E \right) - [w_t]^T \sum_e (w_e \Upsilon_e^{z[2]}) \\ (\alpha_t^{z[3]})_e^a = -\frac{W_{kh}}{W_t^2} \frac{\partial (v^{[3]})^{p_v}}{\partial z_e^{[3]}} \left(\sum_E (1 - \gamma_s^x) (W_S)_E \right) - [w_t]^T \sum_e (w_e \Upsilon_e^{z[3]}) \\ w_t = (\hat{K}^R)^{-T} \left(\frac{W_s + W_{ks}}{W_t^2} \hat{\Psi}_{kh}^R - \frac{W_{kh}}{W_t^2} (\hat{\Psi}_s^R + \hat{\Psi}_{ks}^R) \right) \end{cases} \quad (3.77)$$

Restam obter as derivadas de $\bar{f}_c^{[.]}$ e $(v^{[.]})^{p_v}$. Sendo $(\hat{\Psi}_s^c)_E(z^{[.]}) = (\hat{\Psi}_s^c)_E^*(z^{[.]}, a_c)$, tem-se que:

$$\frac{\partial (\bar{f}_c)^{[.]}}{\partial z_e^{[.]}} = \frac{\partial (\hat{\Psi}_s^c)_E^*}{\partial z_e^{[.]}} + (\hat{K}_s^c)_E \frac{\partial a_c}{\partial z_e^{[.]}} \quad (3.78)$$

Onde:

$$\begin{cases} \frac{\partial (\hat{\Psi}_s^c)_E^*}{\partial z_e^{[.]}} = \frac{\partial (v^{[.]})^{p_v}}{\partial z_e^{[.]}} (\hat{\Psi}_s^c)_E \\ \frac{\partial a_c}{\partial z_e^{[.]}} = M_c^R \frac{\partial \check{a}^R}{\partial z_e^{[.]}} = -M_c^R (\check{K}^R)^{-1} W_e \left(\frac{\partial \gamma_s^z}{\partial z_e^{[.]}} (\check{\Psi}_s)_e - \frac{\partial \gamma_p^z}{\partial z_e^{[.]}} (\check{\Psi}_p)_e \right) \end{cases} \quad (3.79)$$

Por sua vez:

$$\frac{\partial (v^{[.]})^{p_v}}{\partial z_e^{[.]}} = \frac{p_v}{\check{N}_t} (v^{[.]})^{p_v-1} \quad (3.80)$$

Portanto, tem-se:

$$\frac{\partial(\bar{f}_c)^{[.]}}{\partial z_e^{[.]}} = \frac{p_v}{\tilde{N}_t} (v^{[.]})^{p_v-1} (\hat{\psi}_S^c)_E - (\hat{K}_S^c)_E (W_e^T (\check{K}^R)^{-1} (M_c^R)^T) \left(\frac{\partial \gamma_s^z}{\partial z_e^{[.]}} (\check{\psi}_S)_e - \frac{\partial \gamma_p^z}{\partial z_e^{[.]}} (\check{\psi}_P)_e \right) \quad (3.81)$$

Apesar de M_c^R possuir 16 linhas, devido à imposição de simetria sobre as células, apenas 4 delas são linearmente independentes. Assim, é preciso resolver somente 4 sistemas lineares para a determinação do produto $(\check{K}^R)^{-1} (M_c^R)^T$.

Aqui, também utilizou-se o modelo SIMP para determinar as funções γ_s^z e γ_p^z (Equação 3.52); e as funções γ_s^x , γ_p^x , γ_s^y e γ_p^y (Equação 3.68).

Por fim, utilizou-se o Método de Diferenças Finitas (MDF) para validar cada vetor de sensibilidade descrito. Para evitar imprecisões numéricas que podem surgir nos pontos extremos do domínio, os vetores de topologia foram definidos com valores mínimos maiores que 0, (x_{\min}) , (y_{\min}) e (z_{\min}) , e valores máximos menores que 1, $(1 - x_{\min})$, $(1 - y_{\min})$ e $(1 - z_{\min})$. As variações finitas consideradas, δx , δy e δz , foram de 10% dos valores mínimos:

$$\left| \begin{array}{l} \delta x = \frac{x_{\min}}{10} \\ \delta y = \frac{y_{\min}}{10} \\ \delta z = \frac{z_{\min}}{10} \end{array} \right. \quad (3.82)$$

Define-se o vetor x_{E+} , que vale $(x_E + \delta x)$ no termo correspondente ao elemento selecionado e é igual a x para o restante dos termos; e o vetor x_{E-} , que vale $(x_E - \delta x)$ no termo correspondente ao elemento selecionado e é igual a x para o restante dos termos. Os vetores y_{E+} , y_{E-} , $z_{e+}^{[.]}$ e $z_{e-}^{[.]}$ são definidos de forma análoga.

Assim, dados os vetores de topologia e a função objetivo $h(x, y, z^{[1]}, z^{[2]}, z^{[3]})$, utilizando o MDF com aproximação centrada, tem-se que os termos das derivadas de h são dados numericamente por:

$$\begin{aligned}
\left. \begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial x_E} &\approx \frac{h(x_{E+}, y, z^{[1]}, z^{[2]}, z^{[3]}) - h(x_{E-}, y, z^{[1]}, z^{[2]}, z^{[3]})}{2 \delta x} \\
\frac{\partial h}{\partial y_E} &\approx \frac{h(x, y_{E+}, z^{[1]}, z^{[2]}, z^{[3]}) - h(x, y_{E-}, z^{[1]}, z^{[2]}, z^{[3]})}{2 \delta y} \\
\frac{\partial h}{\partial z_e^{[1]}} &\approx \frac{h(x, y, z_{e+}^{[1]}, z^{[2]}, z^{[3]}) - h(x, y, z_{e-}^{[1]}, z^{[2]}, z^{[3]})}{2 \delta z} \\
\frac{\partial h}{\partial z_e^{[2]}} &\approx \frac{h(x, y, z^{[1]}, z_{e+}^{[2]}, z^{[3]}) - h(x, y, z^{[1]}, z_{e-}^{[2]}, z^{[3]})}{2 \delta z} \\
\frac{\partial h}{\partial z_e^{[3]}} &\approx \frac{h(x, y, z^{[1]}, z^{[2]}, z_{e+}^{[3]}) - h(x, y, z^{[1]}, z^{[2]}, z_{e-}^{[3]})}{2 \delta z}
\end{aligned} \right| \quad (3.83)
\end{aligned}$$

3.5 Implementação Computacional

O programa foi implementado em Fortran; a paralelização foi feita utilizando a API (*Application Programming Interface*) OpenMP; e os sistemas lineares foram solucionados com o pacote PARDISO, licença acadêmica, versão 5.0.0 (PETRA *et al.*, 2014b; PETRA *et al.*, 2014a). O compilador utilizado foi o GFortran.

Os dois arquivos principais são "MainMicro.f90" e "MainMulti.f90". O primeiro executa a otimização de uma microestrutura genérica, sem imposições geométricas ou simplificações de modelo. O segundo trata da otimização dos atuadores celulares, com função de otimizar tanto a macrotopologia do mecanismo quanto suas microtopologias; neste, as microestruturas são células quadradas com dupla simetria e são otimizadas através do modelo representativo.

Seis módulos auxiliares foram desenvolvidos. Neles definem-se subrotinas e variáveis públicas utilizadas em cada etapa do programa principal. A Figura 3.5 apresenta o fluxograma do funcionamento geral do programa.

Há dois tipos de arquivos de entrada: de parâmetros e de topologia. Nos arquivos de parâmetros, define-se, em ordem preestabelecida, cada parâmetro necessário para a execução do programa: o número de núcleos de processamento, as propriedades do material, as dimensões do domínio e sua discretização, os carregamentos e restrições, a modalidade de otimização a ser realizada, os parâmetros do método de otimização, entre outros. Já os arquivos de topologia, usados para determinar as topologias iniciais dos mecanismos, correspondem simplesmente aos vetores x e y para uma macroestrutura, ou z para uma microestrutura.

Através do módulo "Setup.f90" o programa lê esses arquivos e armazena as informações em suas variáveis. Algumas das entradas são passadas diretamente aos módulos "Geometry.f90", no qual se definem as malhas e os vetores de topologia, e "Fem.f90", no qual se definem as dimensões das matrizes tangentes e vetores resíduo.

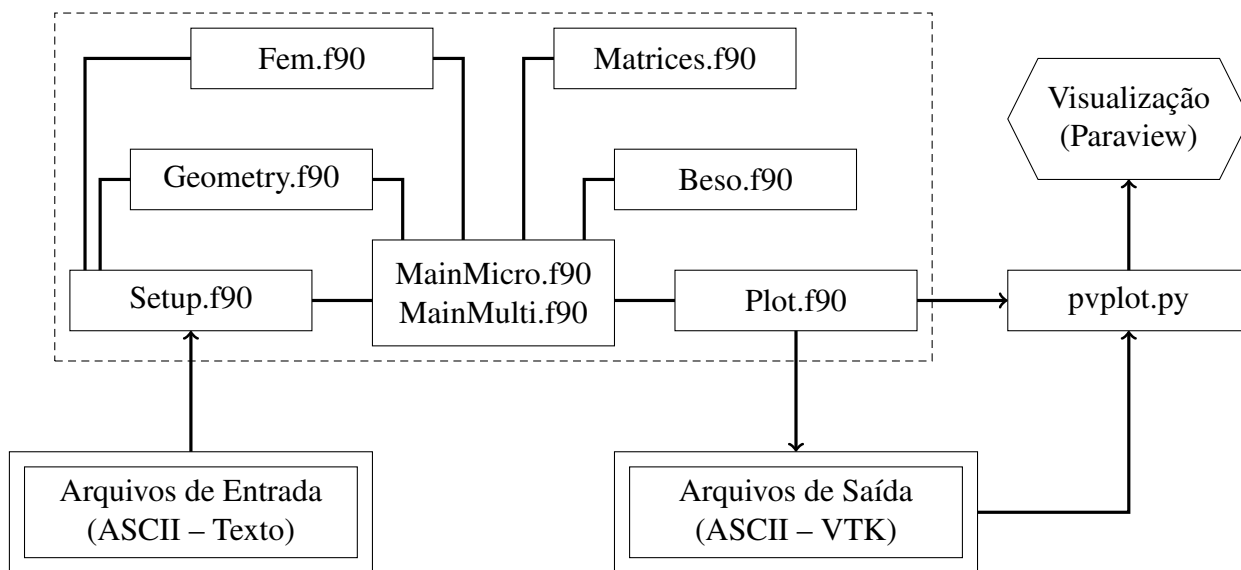


Figura 3.5 – Fluxograma do Programa

Na etapa de análise, o programa principal ("MainMicro.f90" ou "MainMulti.f90") utiliza o módulo "Fem.f90" para definir cada matriz tangente e vetor resíduo elementar, fazer o *assembly* e aplicar as restrições mecânicas da estrutura. O módulo "Matrices.f90" é usado para operar com a matriz do sistema linear e armazená-la no formato CSR (*Compressed Sparse Row*). Em cada iteração do método de Newton-Raphson, o sistema linear é resolvido com o pacote PARDISO.

No laço de otimização, utiliza-se o módulo "Beso.f90" para calcular as sensibilidades, filtrá-las, atualizar os vetores de topologia e calcular a função-objetivo. Em tempo de execução, o módulo "Plot.f90" é usado para exportar arquivos de saída e exibi-los através do programa de visualização Paraview. Através do módulo "Plot.f90" um comando é enviado ao Bash, que manda executar o código "pvplot.py", em Python; este utiliza o módulo "paraview.simple" para gerenciar as exibições feitas.

Os arquivos de saída são malhas, topologias, sensibilidades e gráficos de evolução da função-objetivo. Eles são salvos no formato VTK, no qual podem ser lidos diretamente pelo Paraview.

O programa desenvolvido soma em torno de 15000 linhas de código e inclui alguns outros modos de operação além dos 4 tipos de otimização (microescala genérica, microescala com modelo representativo, macroescala e multiescala). Há também um modo de checagem dos vetores de sensibilidade, no qual esses vetores são calculados pelo método de diferenças finitas e comparados com os valores obtidos pelas fórmulas analíticas. E um modo para avaliação da topologia real dos atuadores celulares, substituindo os elementos simplificados pelas malhas completas das células.

O método de otimização BESO, por sua natureza heurística, exige uma etapa de

calibração de parâmetros, em especial os expoentes p_s , p_s^x , p_s^y , p_p , p_p^x , p_p^y e p_v . Nos casos mais complexos é comum a execução de uma dezena de testes antes de o método convergir para um resultado satisfatório. A necessidade dessa etapa investigativa é o ônus pela simplicidade e rapidez do método.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Validação do Programa

Primeiramente, buscou-se validar cada parte do programa desenvolvido. Para diferentes casos, avaliou-se se o comportamento observado foi coerente com o esperado e, quando possível, fez-se uma comparação quantitativa com resultados obtidos através do programa comercial ANSYS ou fornecidos pela literatura.

Em todas as análises, exceto nas comparações com resultados de referência (subseção 4.1.4), considerou-se um material fictício com módulo de Young $E_y^0 = 200\text{ MPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e utilizaram-se malhas cartesianas uniformes, de elementos quadrados.

4.1.1 Análise Estrutural

Avaliou-se a implementação do MEF para o caso estrutural, com elementos Quad4 e Quad8, usando o modelo linear e o de Hencky, para ambos os estados planos. Para isso, considerou-se uma entrada de pressão nula ($p_c = 0$) e observou-se o deslocamento máximo obtido para os problemas de viga engastada-livre (Figura 4.1) e de viga bi-apoiada (Figura 4.3). Esses valores foram comparados com resultados obtidos no programa ANSYS, utilizando a mesma discretização e os mesmos tipos de elemento: PLANE42, que corresponde ao Quad4; e PLANE82, que corresponde ao Quad8 (PETER, 1994).

As integrações por quadratura de Gauss foram feitas com 4 pontos (2 por dimensão), já que este é o padrão adotado pelo ANSYS.

Para a viga engastada-livre, de dimensões $1000 \times 50\text{ mm}$, utilizou-se uma malha de 1000×50 elementos, com 1 mm de aresta.

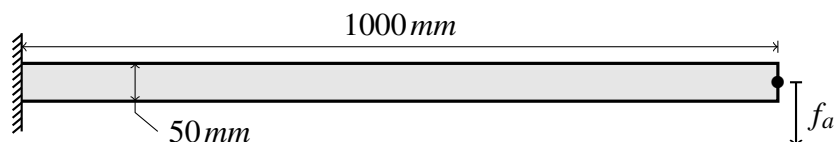


Figura 4.1 – Viga Engastada-Livre

A Figura 4.2 apresenta, em escala real, a viga original em cinza claro e deformada em cinza escuro para ambos os modelos, linear (a) e não-linear (b). Esse resultado é para uma malha de elementos Quad8 em EPT, com uma carga aplicada $f_a = 5\text{ kN/m}$. Observa-se que, ao considerar um estado plano, para não haver necessidade de definir a espessura dos elementos ω , os carregamentos e constantes de mola são definidos por unidade de comprimento.

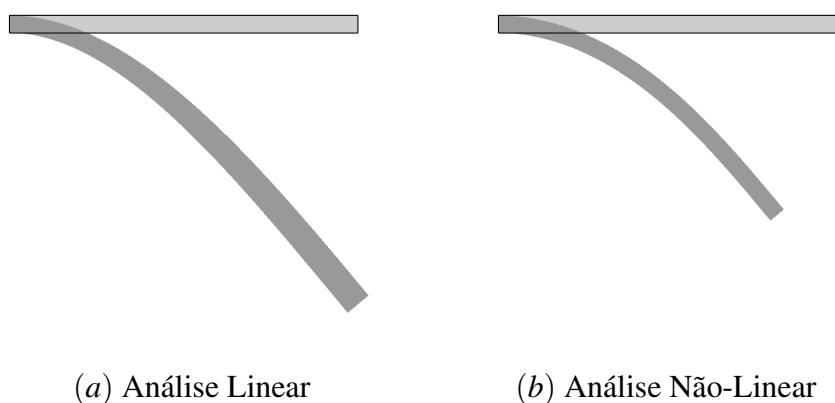


Figura 4.2 – Viga Engastada-Livre Deformada ($f_a = 5\text{ kN/m}$)

As deformações obtidas foram coerentes. O caso linear corresponde a uma amplificação proporcional da cinemática de uma viga em regime de pequenos deslocamentos, por isso, sua extremidade move-se somente na direção vertical, sem o recuo que ocorreria com a rotação da viga. Por sua vez, o caso não-linear aproxima de forma mais fiel o comportamento físico da estrutura em regimes de grandes deslocamentos e deformações. Dessa forma, nota-se uma rotação realista da viga, sem a distorção observada no caso linear, no qual há um aumento irreal de seu volume.

Para avaliar se a ordem de grandeza dos resultados está correta, essa figura foi sobreposta às malhas deformadas geradas pelo ANSYS. Visualmente, não se pôde observar diferenças. Então, para realizar uma validação quantitativa, compararam-se os resultados de deslocamento do nó central da extremidade livre, onde se aplica a carga pontual.

A Tabela 4.1 apresenta a comparação para malhas de elementos Quad4, em ambos os estados planos, considerando os casos linear e não-linear, para dois carregamentos, $f_a = 50\text{ N/m}$ e $f_a = 5\text{ kN/m}$.

A Tabela 4.2 apresenta a mesma comparação para malhas de elementos Quad8.

Para os casos lineares, tem-se que o aumento de carga em 100 vezes resulta no mesmo aumento no deslocamento, como esperado pela essência das relações lineares. Além disso, os resultados foram idênticos aos obtidos através do programa ANSYS.

Para os casos não-lineares, apesar de o ANSYS também utilizar o tensor de deformações logarítmico quando se habilita a análise geometricamente não-linear (através do parâmetro NLGEOM), observaram-se pequenas diferenças. A maior delas, quando em EPD sob 5 kN/m , foi de 0,40% para ambos os tipos de elemento.

Tabela 4.1 – Deslocamento na Extremidade Livre, Elemento Quad4

Caso	Programa Desenvolvido	ANSYS	Diferença Relativa
EPT, Linear, 50 N/m	8,013 mm	8,013 mm	0,00 %
EPT, Linear, 5 kN/m	801,3 mm	801,3 mm	0,00 %
EPT, Não-Linear, 50 N/m	8,013 mm	8,012 mm	0,01 %
EPT, Não-Linear, 5 kN/m	584,0 mm	585,1 mm	0,19 %
EPD, Linear, 50 N/m	7,287 mm	7,287 mm	0,00 %
EPD, Linear, 5 kN/m	728,7 mm	728,7 mm	0,00 %
EPD, Não-Linear, 50 N/m	7,287 mm	7,286 mm	0,01 %
EPD, Não-Linear, 5 kN/m	551,6 mm	549,4 mm	0,40 %

Tabela 4.2 – Deslocamento na Extremidade Livre, Elemento Quad8

Caso	Programa Desenvolvido	ANSYS	Diferença Relativa
EPT, Linear, 50 N/m	8,014 mm	8,014 mm	0,00 %
EPT, Linear, 5 kN/m	801,4 mm	801,4 mm	0,00 %
EPT, Não-Linear, 50 N/m	8,014 mm	8,014 mm	0,00 %
EPT, Não-Linear, 5 kN/m	584,0 mm	585,2 mm	0,21 %
EPD, Linear, 50 N/m	7,289 mm	7,289 mm	0,00 %
EPD, Linear, 5 kN/m	728,9 mm	728,9 mm	0,00 %
EPD, Não-Linear, 50 N/m	7,289 mm	7,288 mm	0,01 %
EPD, Não-Linear, 5 kN/m	551,7 mm	549,5 mm	0,40 %

Para a viga bi-apoiada, de dimensões $2000 \times 50\text{ mm}$, analisou-se apenas metade da estrutura devido à simetria do problema. Utilizou-se uma malha de 1000×50 elementos, com 1 mm de aresta.

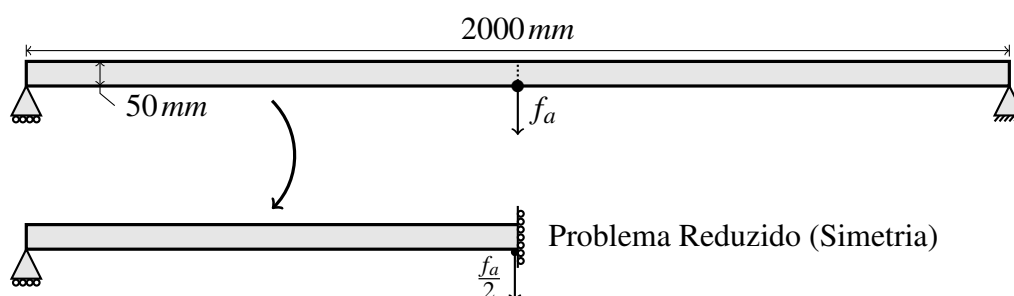


Figura 4.3 – Viga Bi-Apoiada

A Figura 4.4 apresenta, em escala real, a viga original em cinza claro e deformada em cinza escuro para ambos os modelos, linear (a) e não-linear (b). Esse resultado é para uma malha de elementos Quad8 em EPT, com uma carga aplicada $f_a = 10\text{ kN/m}$. A estrutura reduzida foi espelhada para que a viga completa pudesse ser visualizada.

Novamente, observam-se comportamentos esperados. No caso linear, há apenas uma amplificação da cinemática de uma viga em regime de pequenos deslocamentos, no qual ela desloca-se verticalmente. E no caso não-linear, a viga forma um arco realista, sem grandes distorções de volume.

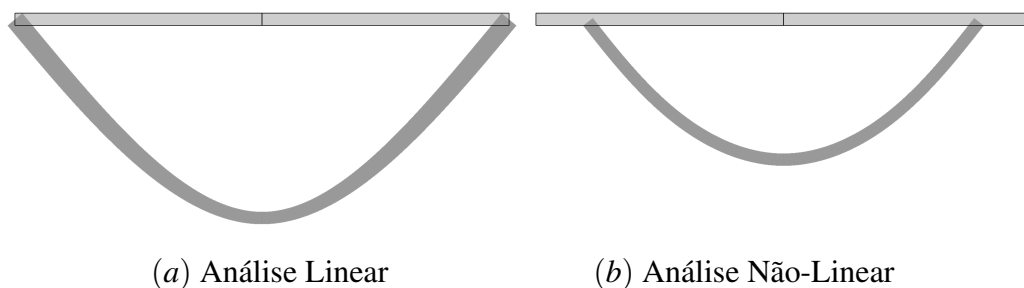


Figura 4.4 – Viga Bi-Apoiada Deformada ($f_a = 10\text{ kN/m}$)

Analisou-se o deslocamento do nó inferior da seção central, comparando-o com o resultado obtido através do ANSYS. As análises lineares foram idênticas e, tanto para o Quad4 quanto para o Quad8, a maior diferença foi de 0,38 %, para a carga de $f_a = 10\text{ kN/m}$, em EPD.

Em ambos os problemas, a análise não-linear forneceu resultados coerentes, com diferenças menores que 0,50 % quando comparada ao programa comercial. Entendeu-se que essas pequenas discrepâncias são provenientes de sofisticções, ocultas ao usuário, executadas pelo ANSYS ao trabalhar em regimes não-lineares, com grandes deslocamentos e deformações. De qualquer forma, erros dessa magnitude são pouco relevantes no escopo deste trabalho, já que as simulações serem realistas e consistentes é suficiente para que o processo de otimização funcione adequadamente.

4.1.2 Carregamento Hidrostático

A implementação do carregamento hidrostático foi avaliada considerando elementos Quad4, em EPT. Dois problemas foram considerados: o de uma estrutura delgada sob expansão (Figura 4.5); e o de uma viga bi-engastada (Figura 4.7).

Considera-se a estrutura delgada retangular, de dimensões $100 \times 200\text{ mm}$, com uma parede sólida de 4 mm de espessura envolvendo o domínio de fluido pressurizado. A parte sólida é representada em cinza escuro e a parte fluida em cinza claro. Impõe-se uma quantidade mínima de restrições e analisa-se apenas um quarto da estrutura, devido a sua simetria. Utiliza-se o modelo não-linear, com uma malha de 50×100 elementos de aresta de 1 mm e as seguintes propriedades de penalidade: $z_{\min} = 10^{-2}$; $p_s = 2$; $p_p = 2$.

A Figura 4.6 apresenta, em escala real, a estrutura descarregada (a), carregada por $p_c = 50\text{ kPa}$ (b) e carregada por $p_c = 500\text{ kPa}$ (c).

Para este caso, fez-se apenas uma análise qualitativa, observando se o carregamento hidrostático adequa-se corretamente conforme a estrutura deforma.

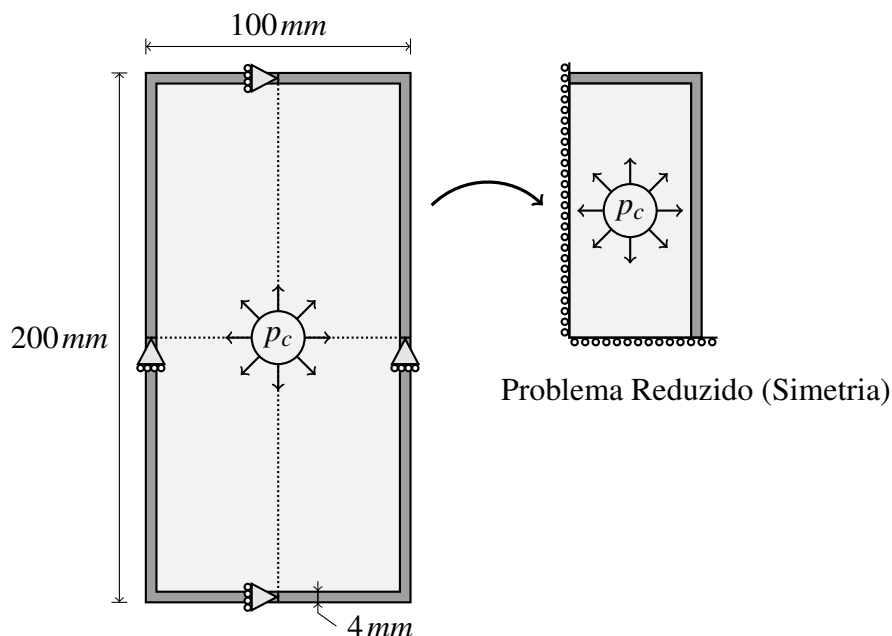


Figura 4.5 – Estrutura Delgada

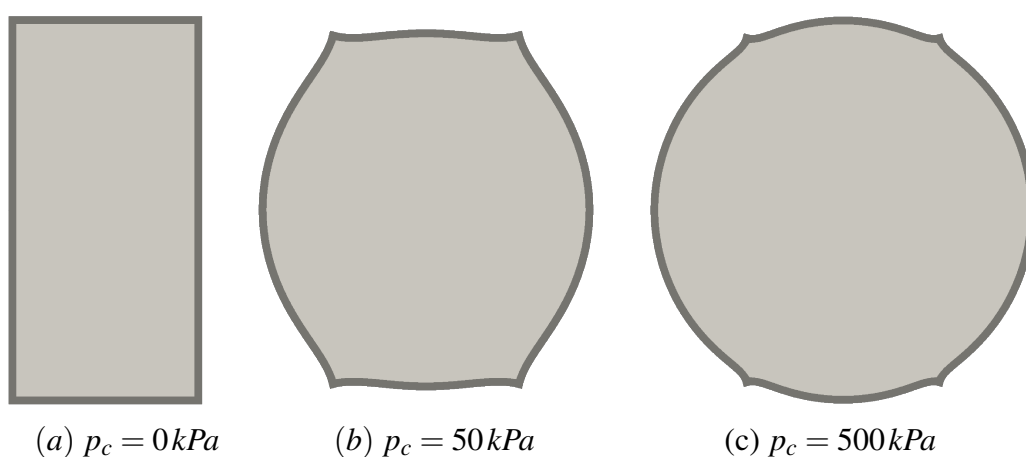


Figura 4.6 – Estrutura Delgada sob Carregamento Hidrostático

Como esperado, a menos de efeitos de borda evidentes nos vértices do retângulo, a estrutura torna-se circular conforme aumenta-se a pressão aplicada. Isso ocorre pois essa é sua forma mais estável, na qual tem-se um perímetro interno minimizado. Se o carregamento não estivesse atualizando sua direção com o campo de deslocamentos, a estrutura teria uma direção preferencial de deformação, que seria notável mesmo para valores elevados de pressão, já que a carga horizontal é maior do que a carga vertical na configuração inicial.

Para a viga bi-engastada, de dimensões 1000x50 mm, utilizou-se uma malha de 200x10 elementos, com 5 mm de aresta. Adicionou-se uma fileira de 200 elementos fluidos fixados sobre a estrutura, para aplicar a carga hidrostática. Na Figura 4.7, a parte sólida é representada em cinza escuro e a parte fluida em cinza claro.

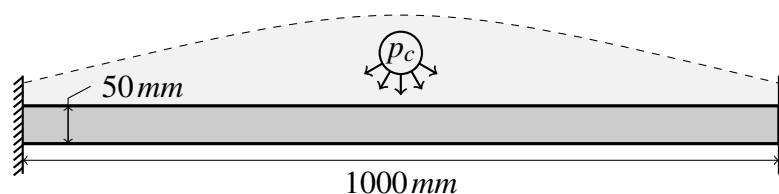
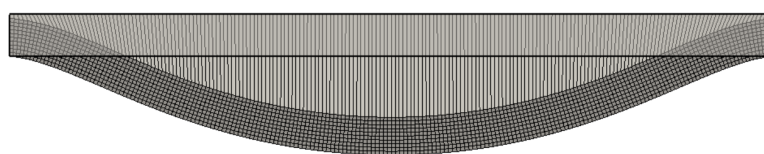


Figura 4.7 – Viga Bi-Engastada

A Figura 4.8 apresenta, para o caso não-linear, a viga deformada após a aplicação de uma carga de $p_c = 500\text{ kPa}$. Os valores de penalidade utilizados foram: $z_{\min} = 10^{-6}$; $p_s = 3$; $p_p = 3$.

Figura 4.8 – Viga Bi-Engastada sob Carregamento Hidrostático ($p_c = 500\text{ kPa}$)

O deslocamento do nó inferior da seção central foi comparado com resultados obtidos no programa ANSYS. A Tabela 4.3 mostra essa comparação para dois valores de carga, para o caso linear e não-linear.

Tabela 4.3 – Deslocamento Máximo na Seção Central

Caso	Programa Desenvolvido	ANSYS	Diferença Relativa
Linear, 5 kPa	6,394 mm	6,394 mm	0,00 %
Linear, 500 kPa	639,4 mm	639,4 mm	0,00 %
Não-Linear, 5 kPa	6,319 mm	6,323 mm	0,06 %
Não-Linear, 500 kPa	129,9 mm	128,2 mm	1,33 %

Mais uma vez, os resultados dos casos lineares coincidiram. Para o caso não linear, observou-se uma diferença mais elevada, de 1,33 %, quando comparada ao caso onde não havia carregamentos hidrostáticos. Esse aumento de discrepância foi atribuído à forma como o ANSYS trata imposições de pressão em problemas geometricamente não-lineares. Conforme o campo de deslocamentos é alterado, os vetores de cargas nodais equivalentes são rotacionados para se manterem ortogonais à superfície, entretanto, o módulo dessas cargas permanece inalterado. Por sua vez, no programa desenvolvido, além de rotacionar, os valores das cargas crescem conforme aumenta-se a superfície sob pressão. Isso faz com que, no caso apresentado, o carregamento na configuração final da estrutura seja maior no programa desenvolvido do que no ANSYS.

4.1.3 Sensibilidades

A análise de sensibilidades foi validada comparando os vetores calculados com os obtidos através do MDF (Equação 3.83). Consideraram-se casos em EPT, com elementos Quad4 para a microescala e elementos Quad8 para a macroescala. As integrações por quadratura de Gauss foram feitas com 25 pontos (5 por dimensão).

Considerou-se a viga engastada-livre apresentada na Figura 4.9, de dimensões $80 \times 50 \text{ mm}$, com três domínios distintos, delimitados por círculos e semi-elipses, para calcular os vetores de sensibilidade correspondentes à minimização da *compliance* média h_c (Equação 3.56). O valor de pressão é nulo ($p_c = 0 \text{ Pa}$), o carregamento é dado pela carga pontual f_a .

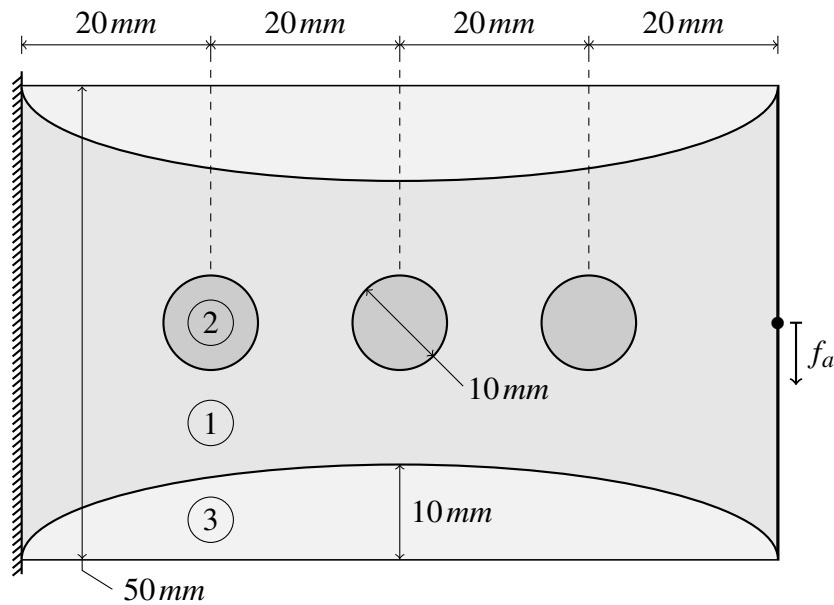


Figura 4.9 – Viga para Validação da Sensibilidade

Para o caso microescala, utilizou-se uma malha de 160×100 microelementos, na qual o material [1] corresponde a um sólido de módulo de Young $E_y^{(1)} = 200 \text{ MPa}$ e os materiais [2] e [3] correspondem a elementos vazios, com parâmetros de penalidade $z_{\min} = 10^{-3}$ e $p_s = 3$.

Para o caso macroescala, utilizou-se uma malha de 80×50 macroelementos, na qual o material [1] corresponde a uma célula sólida de módulo de Young $E_y^{(1)} = 200 \text{ MPa}$, o material [2] a uma célula sólida de módulo de Young $E_y^{(2)} = 20 \text{ MPa}$ e o material [3] a uma célula vazia, com parâmetros de penalidade $x_{\min} = y_{\min} = 10^{-3}$ e $p_s^x = p_s^y = 3$.

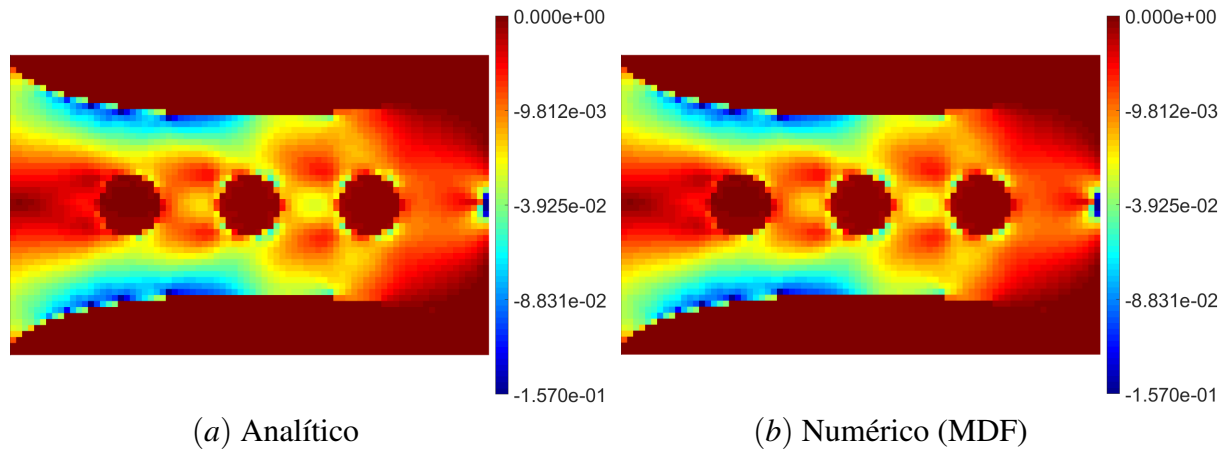
Aplicou-se um carregamento $f_a = 100 \text{ N/m}$ para os casos lineares e $f_a = 10 \text{ kN/m}$ para os não lineares. Para cada caso, a Tabela 4.4 apresenta o menor valor de sensibilidade observado na malha e a maior diferença, em valor absoluto, entre as sensibilidades obtidas com a formulação analítica e pelo MDF. Para este problema, no qual a função-objetivo é monótona, as sensibilidades são sempre negativas. Os valores máximos obtidos em todos os casos foram próximos ao zero de máquina, por isso, não foram apresentados.

Tabela 4.4 – Sensibilidade Mínima e Erro Máximo para h_c

Caso	Sensibilidade Mínima	Erro Máximo
Micro, α_c , Linear	$-7,804.10^{-9}$	$1,0.10^{-14}$
Micro, α_c , Não-Linear	$-1,153.10^{-4}$	$1,7.10^{-9}$
Macro, α_c^x , Linear	$-5,370.10^{-5}$	$1,0.10^{-9}$
Macro, α_c^x , Não-Linear	$-7,940.10^{-1}$	$1,0.10^{-7}$
Macro, α_c^y , Linear	$-5,364.10^{-5}$	$1,0.10^{-9}$
Macro, α_c^y , Não-Linear	$-7,932.10^{-1}$	$1,0.10^{-7}$

Nota-se que a ordem de grandeza dos erros foi sempre muito menor do que a das sensibilidades (pelo menos quatro ordens de diferença). Isso significa que a formulação analítica foi corretamente desenvolvida e implementada.

As diferenças nos valores de sensibilidade entre os casos vêm das mudanças de discretização, carregamento e tipo de elemento. De toda forma, os mapas de sensibilidade obtidos tiveram distribuições semelhantes. Isso é razoável visto que o comportamento qualitativo da estrutura e sua relação com os vetores de topologia é o mesmo em todos os casos. A forma dessa distribuição está ilustrada na Figura 4.10, que apresenta os resultados analítico (a) e numérico (b) para o vetor α_c^x do caso macroescala não-linear.

Figura 4.10 – Validação do Mapa de Sensibilidade de α_c^x

Para tornar mais evidentes as variações no mapa de sensibilidades, algumas medidas foram tomadas na geração dessas imagens. Devido ao carregamento pontual, surge uma região de sensibilidade muito elevada em torno do nó de aplicação da carga, isso desajusta a escala e prejudica a visualização. Para contornar esse problema, em todos os mapas cor apresentados, definiu-se a escala entre o quinto menor valor até o quinto maior, saturando valores extremos. Por essa razão, o valor que aparece na escala ($-1,570.10^{-1}$) difere do apresentado na Tabela 4.4 ($-7,940.10^{-1}$).

Uma segunda medida para a apresentação dos mapas de cores foi usar uma escala de

raiz quadrada, que aumenta o contraste entre elementos de menor valor, reduzindo a distorção causada por valores de sensibilidade muito elevados em alguns pontos. Por isso que se observa uma variação não-linear dos valores nas barras de cor apresentadas. Evidentemente, para valores negativos, avaliou-se a raiz quadrada do módulo do valor e então alterou-se o sinal.

Na Figura 4.10, pode-se observar uma sutil assimetria em relação ao eixo horizontal, natural do modelo não-linear. As regiões críticas, em azul, são o ponto de aplicação da carga e as áreas superior e inferior próximas ao engaste. As regiões de menor função estrutural, em vermelho, são as áreas superior e inferior da extremidade livre e a parte central próxima ao engaste.

Visualmente, não é possível encontrar distinções entre os dois resultados. A diferença entre os mapas de sensibilidade obtidos analiticamente e numericamente é apresentada na Figura 4.11.

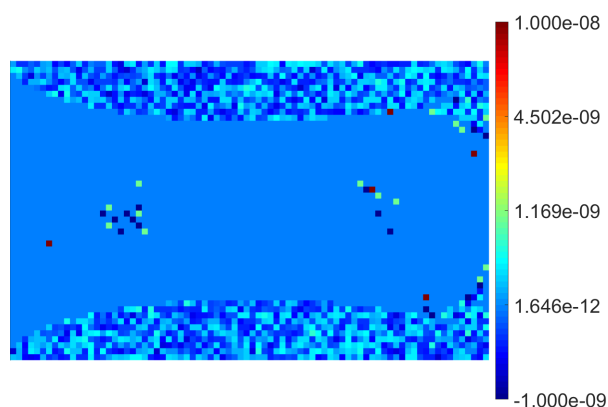


Figura 4.11 – Erro Entre Valores Analíticos e Numéricos de α_c^x

Observa-se um erro quase nulo na região sólida, com alguns pontos de pico; nas áreas de baixa sensibilidade, o erro tem um padrão ruidoso. Isso indica que as pequenas diferenças observadas são provenientes das limitações da aritmética de ponto flutuante, reforçando a conclusão de que a análise de sensibilidades foi bem realizada para essa função-objetivo.

Para a validação dos vetores de sensibilidade da microescala relativos ao trabalho útil h_o e à transmitância mecânica h_t (Equação 3.44), considerou-se uma célula quadrada simétrica, com cavidades elípticas e molas-objetivo posicionadas conforme apresentado na Figura 4.12. A pressão aplicada foi de $p_c = 25 \text{ MPa}$, as constantes de mola foram $k_1 = 5 \text{ kN/m}^2$ e $k_2 = 1 \text{ kN/m}^2$. Para o quadrante, utilizou-se uma malha de 50×50 elementos, com parâmetros de penalidade $z_{\min} = 10^{-3}$, $p_s = 1,10$ e $p_p = 1,05$.

Avaliou-se apenas o caso mais complexo, o não-linear. A Tabela 4.5 apresenta os valores extremos de sensibilidade observados e a maior diferença, em valor absoluto, entre os resultados obtidos com a formulação analítica e pelo MDF.

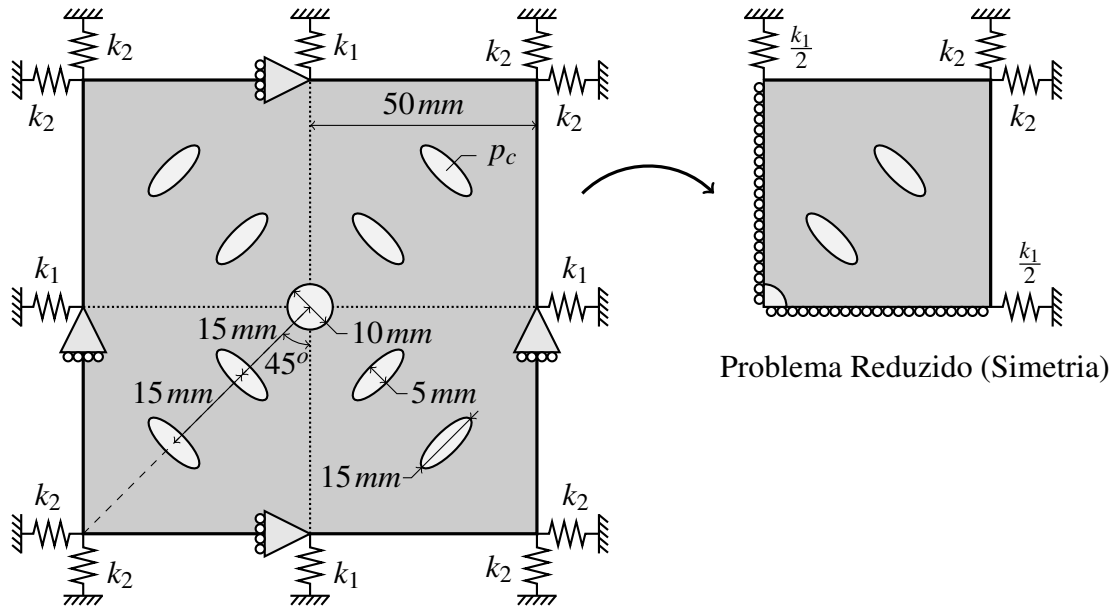


Figura 4.12 – Célula para Validação da Sensibilidade Microescala

Tabela 4.5 – Sensibilidades e Erro Máximo para h_o e h_t Microescala

Caso	Sensibilidade Mínima	Sensibilidade Máxima	Erro Máximo
α_o , Não-Linear	$-7,766.10^{-8}$	$-2,144.10^{-10}$	$9,2.10^{-10}$
α_t , Não-Linear	$-5,122.10^{-11}$	$7,294.10^{-13}$	$1,4.10^{-13}$

Observa-se que todas as sensibilidades para a função-objetivo de trabalho útil são negativas, isso indica que a função aumenta para qualquer sólido que se torne fluido, o que é razoável, já que isso aumenta as cargas no sistema. O mesmo ocorre na minimização da *compliance* média, o que destaca a necessidade de uma restrição de volume, para que não se obtenha a solução trivial com todos os elementos iguais (fluidos no caso do trabalho útil e sólidos no caso da *compliance*).

Por sua vez, quando se avalia a eficiência energética do sistema, encontram-se valores positivos de sensibilidade, o que significa que, apesar de o trabalho útil sempre crescer, transformar certos elementos sólidos em fluido reduz a transmitância mecânica do mecanismo.

Os valores de erro máximo parecem demasiado elevados para a ordem de grandeza dos valores de sensibilidade. Antes de assumir que a validação foi mal sucedida, é preciso analisar em que locais esses erros ocorrem. A Figura 4.13 apresenta os mapas de sensibilidade obtidos pelas fórmulas desenvolvidas (a) e pela diferenciação numérica (b), para a maximização da transmitância mecânica. Mais uma vez, ajustes nas escalas foram realizados para melhorar a visualização dos dados.

Novamente, os dois resultados são visualmente idênticos. Nota-se as sensibilidades mais baixas, em azul, nas regiões fluidas e nas proximidades das molas. Fica evidente a neces-

sidade de impor uma parede celular sólida, que não participa do domínio de projeto, para evitar que os elementos conectados às molas-objetivo sejam transformados em fluidos.

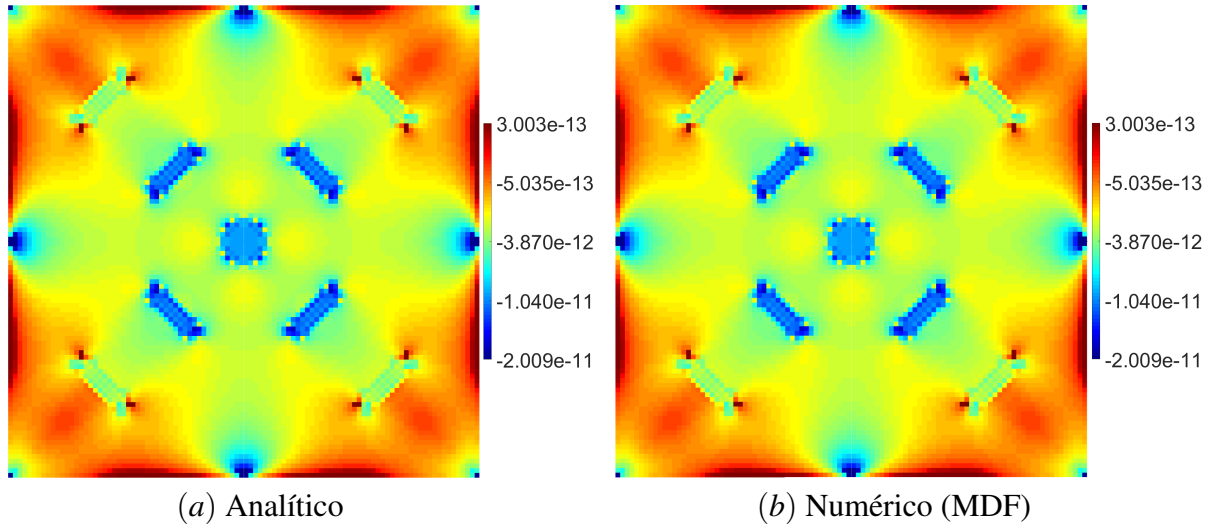


Figura 4.13 – Validação do Mapa de Sensibilidade de α_t

A Figura 4.14 mostra a distribuição do erro entre resultados analítico e numérico.

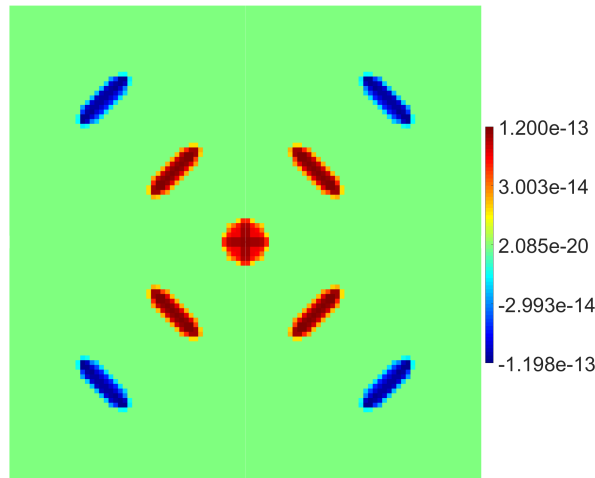


Figura 4.14 – Erro Entre Valores Analíticos e Numéricos de α_t

Como fica evidente, os erros assumem valores perceptíveis apenas nos elementos fluidos. Intui-se que as diferenças nesses elementos tem origem numérica e que elas foram mais relevantes, em relação às observadas nos elementos sólidos, pela combinação de baixa rigidez e elevada pressão, que pode causar erros até mesmo na etapa precedente de simulação numérica. O resultado para a maximização do trabalho útil foi semelhante: sensibilidades menores nos elementos fluidos e nas regiões próximas a molas-objetivo; erros desprezíveis nas regiões sólidas; erros perceptíveis nos elementos fluidos.

De toda forma, as discrepâncias observadas não são suficientes para alterar a análise comparativa entre elementos fluidos. Portanto, entendeu-se que a formulação microescala foi desenvolvida apropriadamente.

Para a validação dos vetores de sensibilidade da macroescala relativos a h_o e h_t , considerou-se o atuador em "L" apresentado na Figura 4.15, composto por três tipos de células. As regiões de cor escura correspondem a células de tipo [1], as de cor intermediária correspondem a células do tipo [2] e as de cor clara correspondem a células de tipo [3]. O mecanismo está engastado no topo e atua em dois pontos de interesse, nos quais se encontram as molas-objeto.

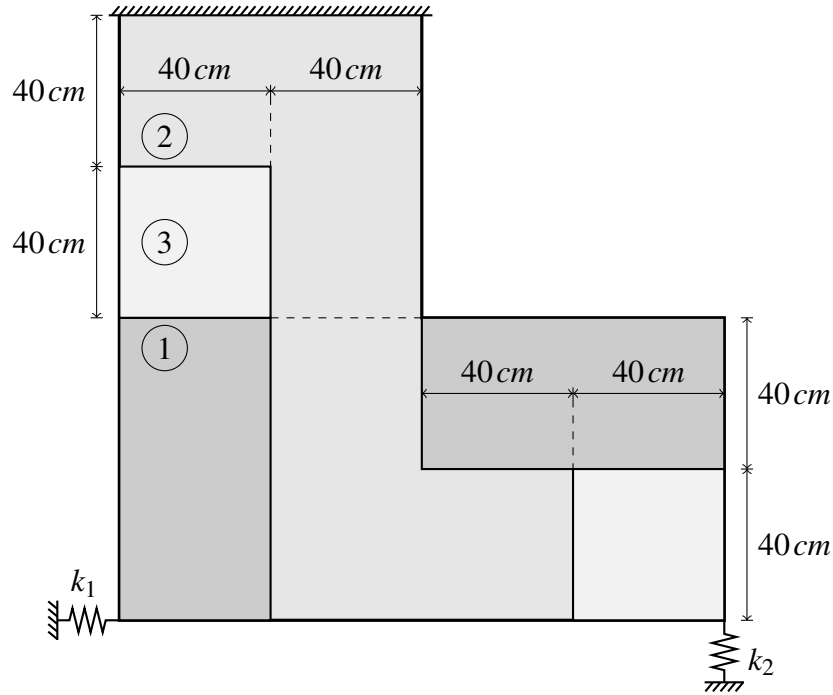


Figura 4.15 – Atuador para Validação da Sensibilidade Macroescala

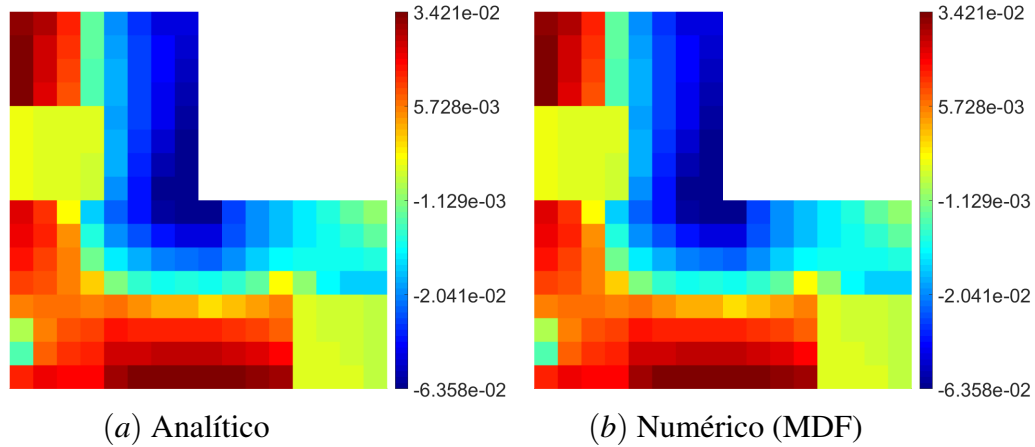
Utilizaram-se células quadradas de dimensões $10 \times 10 \text{ cm}$, compostas por 100×100 microelementos, constituindo uma macrotopologia de 192 macroelementos. Todas as células têm uma única cavidade circular no centro, a fração volumétrica de sólido na célula de tipo [1] é de 90%, na célula de tipo [2] é de 75% e na célula de tipo [3] é de 60%. As constantes de mola valem $k_1 = 1,0 \text{ kN/m}^2$ e $k_2 = 2,5 \text{ kN/m}^2$, a pressão aplicada é de $p_c = 5 \text{ MPa}$ e os parâmetros de penalidade são $p_s = p_s^x = p_s^y = 1,10$, $p_p = p_p^x = p_p^y = 1,05$, $p_v = 2,0$ e $z_{\min} = x_{\min} = y_{\min} = 10^{-3}$.

Os valores extremos de sensibilidade e o erro máximo do resultado numérico em relação ao analítico são apresentados na Tabela 4.6 para ambos os vetores da macrotopologia, em regime não-linear.

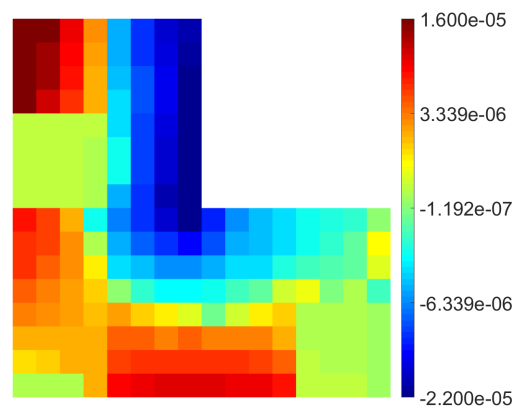
Neste exemplo, os erros são três ordens de grandeza menores que os valores de sensibilidade. A Figura 4.16 mostra os resultados analítico (a) e numérico (b) para a sensibilidade em relação ao vetor de topologia y , relativo à maximização do trabalho útil.

Tabela 4.6 – Sensibilidades e Erro Máximo para h_o e h_t Macroescala

Caso	Sensibilidade Mínima	Sensibilidade Máxima	Erro Máximo
α_o^x , Não-Linear	$-1,395 \cdot 10^{-1}$	$8,410 \cdot 10^{-2}$	$4,2 \cdot 10^{-5}$
α_t^x , Não-Linear	$-8,138 \cdot 10^{-7}$	$5,467 \cdot 10^{-7}$	$2,6 \cdot 10^{-10}$
α_o^y , Não-Linear	$-1,057 \cdot 10^{-1}$	$3,593 \cdot 10^{-2}$	$4,0 \cdot 10^{-5}$
α_t^y , Não-Linear	$-6,159 \cdot 10^{-7}$	$2,302 \cdot 10^{-7}$	$1,9 \cdot 10^{-10}$

Figura 4.16 – Validação do Mapa de Sensibilidade de α_o^y

Nota-se que os valores de sensibilidade α_o^y das células do tipo [3] são próximos de zero. Isso ocorre pois essas células são definidas apenas pelo vetor x , os pequenos valores que aparecem nos resultados são provenientes da abordagem *soft-kill*. A Figura 4.17 apresenta a distribuição do erro.

Figura 4.17 – Erro Entre Valores Analíticos e Numéricos de α_o^y

Tem-se que o erro se comporta de forma semelhante ao mapa de sensibilidades, ou seja, ele é maior nas regiões de maior sensibilidade. Essa consistência é desejada e corrobora a validação. No caso da microescala anterior, a existência de regiões mais sensíveis, em que há nós cercados por elementos fluidos de elevada pressão e baixa rigidez, distorce essa característica do mapa de erros.

Por último, os vetores de sensibilidade da multiescala relativos a h_o e h_t foram validados para um outro atuador em "L", apresentado na Figura 4.18. Ele é engastado numa região do canto inferior esquerdo e quatro molas-objetivo são posicionadas nos pontos de atuação.

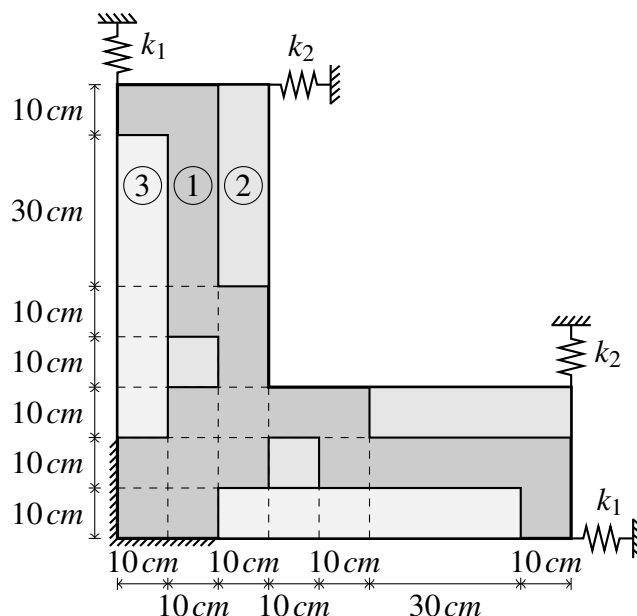


Figura 4.18 – Atuador para Validação da Sensibilidade Multiescala

Utilizaram-se células quadradas de dimensões $10 \times 10 \text{ cm}$, compostas por 100×100 microelementos, constituindo uma macrotopologia de 45 macroelementos. Todas as células têm uma única cavidade circular no centro, as frações volumétricas de sólido nas células são as mesmas do exemplo macroescala acima. As constantes de mola valem $k_1 = 1,0 \text{ kN/m}^2$ e $k_2 = 2,5 \text{ kN/m}^2$, a pressão aplicada e os parâmetros de penalidade também são os mesmos.

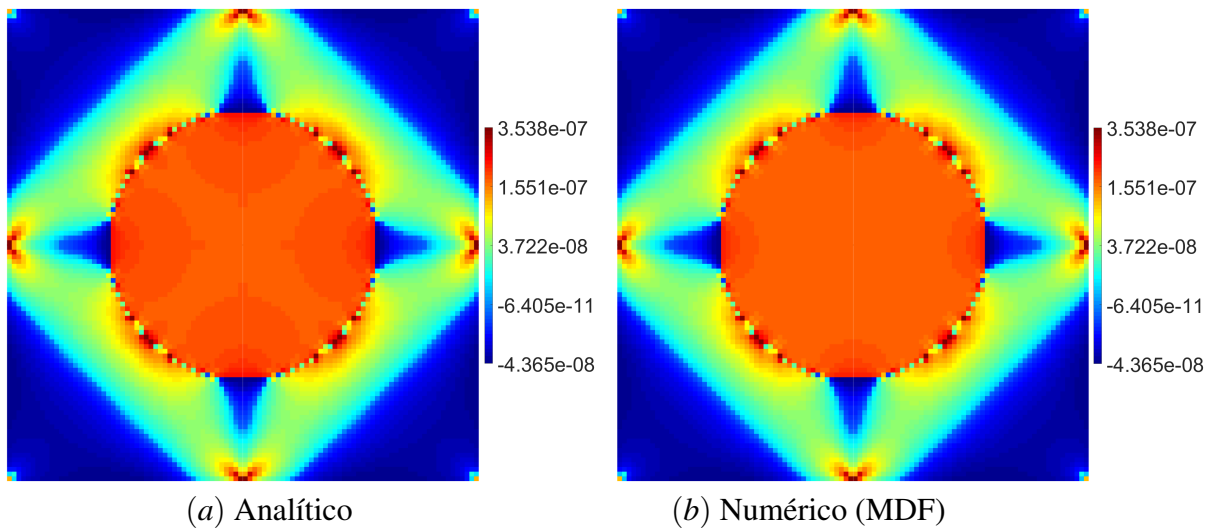
A Tabela 4.7 apresenta os dados para as sensibilidades relativas aos vetores de microtopologia, $z^{[1]}$, $z^{[2]}$ e $z^{[3]}$.

Assim como no exemplo considerado para a validação microescala, os erros têm ordem de grandeza próxima à ordem das sensibilidades. Contudo, como apresentado na Figura 4.19, os mapas do resultado analítico (a) e numérico (b) são muito semelhantes. Neste caso, pequenas diferenças podem ser notadas visualmente na região de fluido.

Notam-se valores de sensibilidade elevados nos 8 pontos representativos, isso é algo esperado, já que a influência que a célula tem sobre a macroestrutura se dá pelo deslocamento desses pontos na célula isolada e irrestrita. A imposição de uma parede celular evita que essa propriedade prejudique a otimização das microtopologias, uma vez que os arredores desses pontos deixam de fazer parte do domínio de projeto.

Tabela 4.7 – Sensibilidades e Erro Máximo para h_o e h_t Multiescala

Caso	Sensibilidade Mínima	Sensibilidade Máxima	Erro Máximo
$\alpha_o^{z[1]}$, Não-Linear	$-7,803.10^{-4}$	$9,902.10^{-3}$	$6,2.10^{-4}$
$\alpha_t^{z[1]}$, Não-Linear	$-1,565.10^{-8}$	$5,043.10^{-7}$	$1,5.10^{-8}$
$\alpha_o^{z[2]}$, Não-Linear	$-1,331.10^{-3}$	$1,049.10^{-2}$	$8,2.10^{-4}$
$\alpha_t^{z[2]}$, Não-Linear	$-5,133.10^{-8}$	$6,192.10^{-7}$	$2,0.10^{-8}$
$\alpha_o^{z[3]}$, Não-Linear	$-5,940.10^{-2}$	$3,219.10^{-3}$	$1,1.10^{-3}$
$\alpha_t^{z[3]}$, Não-Linear	$-4,965.10^{-7}$	$-2,587.10^{-8}$	$2,2.10^{-8}$

Figura 4.19 – Validação do Mapa de Sensibilidade de $\alpha_t^{z[2]}$

A distribuição do erro (Figura 4.20) apresenta as duas características discutidas nos casos acima. Tem-se que, no domínio fluido, os erros são mais elevados; enquanto no domínio sólido, a distribuição do erro é semelhante à da sensibilidade, de tal forma que o erro relativo é baixo nessa parte da estrutura.

Destaca-se aqui que o que se chama de erro são as discrepâncias entre os resultados obtidos pelo MDF e pela formulação desenvolvida. Essa medida é usada apenas como critério para validar essa formulação e sua implementação computacional. Uma vez considerada válida, entende-se que a abordagem analítica fornece as fórmulas exatas para os valores de sensibilidade.

Dito isso, pela consistência e qualidade dos resultados, conclui-se que as fórmulas de sensibilidade para cada um dos casos considerados foram desenvolvidas e implementadas apropriadamente.

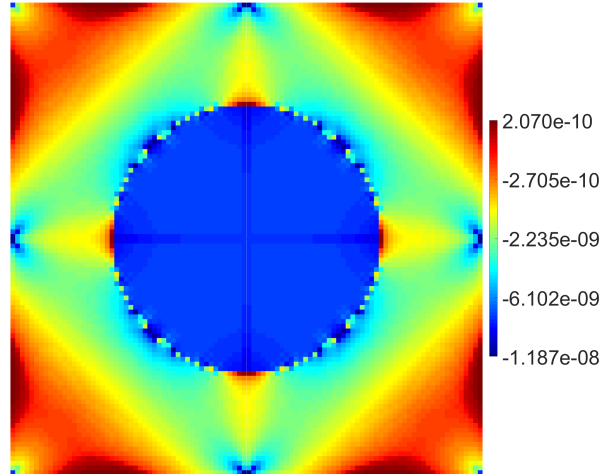


Figura 4.20 – Erro Entre Valores Analíticos e Numéricos de $\alpha_t^{z[2]}$

Antes de abordar a otimização propriamente dita, observa-se se o filtro de sensibilidades está atuando apropriadamente. Para isso, considera-se novamente o problema da Figura 4.9, para a microescala, no caso linear. A Figura 4.21 apresenta o mapa de sensibilidades suavizado para diferentes valores de raio do filtro: 0 mm (sem filtro) (a); 1 mm (b); 2 mm (c); e 3 mm (d).

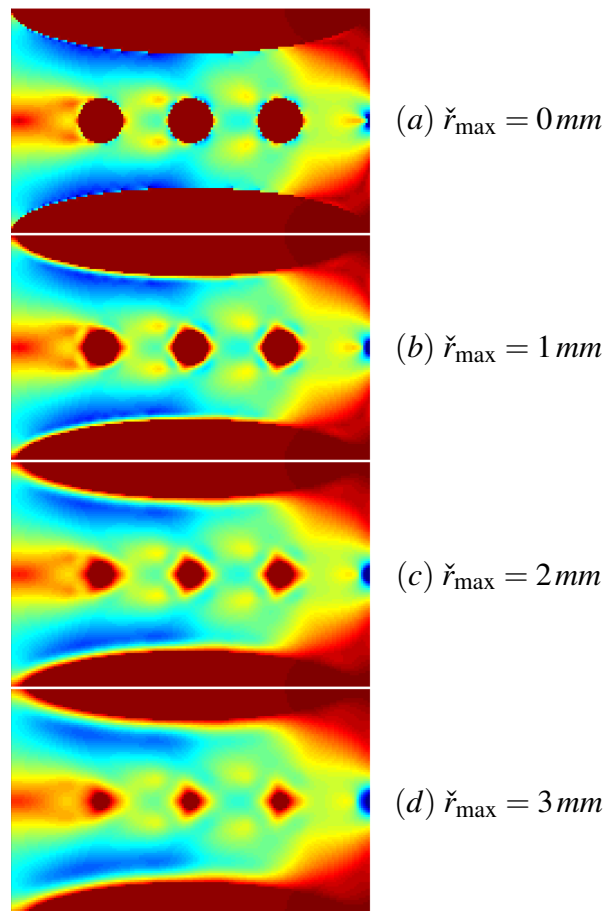


Figura 4.21 – Sensibilidade Filtrada para Diferentes Raios

Tem-se o comportamento esperado, o filtro suaviza o campo de sensibilidades. As partes críticas da estrutura, em azul, têm suas sensibilidades difundidas em regiões mais amplas. Neste caso estrutural com força pontual aplicada, isso favorece a adição de elementos sólidos nessas regiões e evita instabilidades, que poderiam ocorrer caso fossem removidos elementos próximos ao ponto de aplicação da carga.

Além disso, como já foi mencionado, o procedimento de suavização auxilia a redução da dependência do processo de otimização à malha utilizada e a ocorrência do problema de "tabuleiro de xadrez".

4.1.4 Problemas de Referência

Alguns problemas conhecidos foram resolvidos com o programa desenvolvido, no intuito de avaliar se o algoritmo BESO foi bem implementado para cada um dos casos. Para os elementos Quad4 lineares utilizaram-se 4 pontos de Gauss (2 por dimensão), para todos os outros casos utilizaram-se 9 pontos (3 por dimensão).

Primeiramente, considerou-se a viga curta engastada-livre apresentada na Figura 4.22.

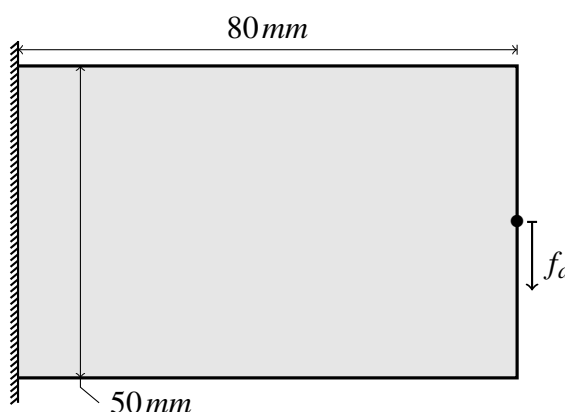


Figura 4.22 – Viga Curta Engastada-Livre

Considerou-se o problema abordado por Huang e Xie (2009), com as mesmas propriedades dadas no artigo, com uma malha de 80x50 elementos Quad4, em caso linear. Partiu-se de uma estrutura completamente sólida e a razão volumétrica alvo foi de $v_f = 50\%$. Impondo $p_c = 0$, o programa microescala foi utilizado para obter uma estrutura com *compliance* média h_c minimizada.

A topologia final, dada na Figura 4.23, é a mesma obtida por Huang e o valor final de *compliance* média correspondeu ao apresentado pela referência: $h_c = 1,865 Nmm$.

Em seguida, considerou-se a viga bi-apoiada apresentada na Figura 4.24. Para o domínio reduzido, utilizou-se uma malha de 120x40 elementos.



Figura 4.23 – Topologia Otimizada para a Viga Curta

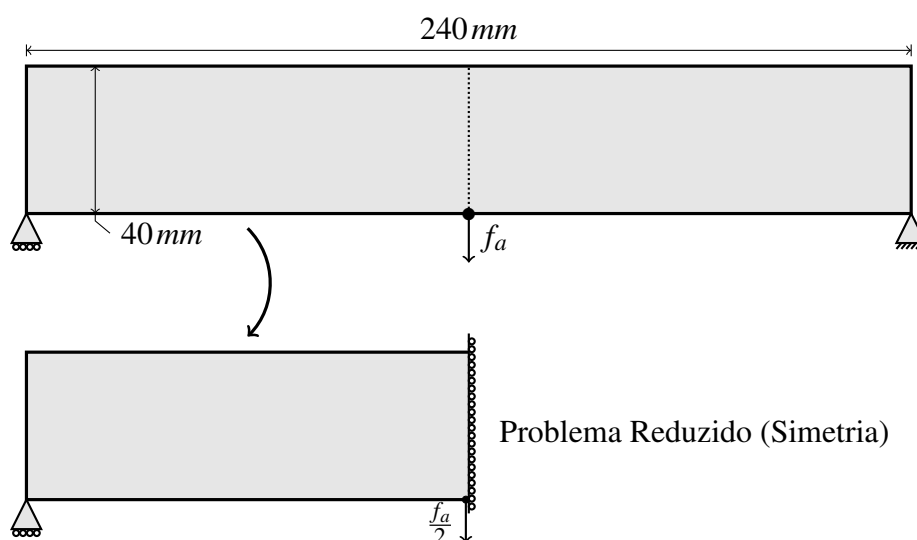


Figura 4.24 – Viga Bi-Apoiada Multi-Material

Novamente, considerou-se o problema dado em Huang e Xie (2009). Aqui, trabalham-se com dois materiais sólidos, um de $E_y^{[1]} = 1,0 \text{ GPa}$ e um de $E_y^{[2]} = 0,1 \text{ GPa}$. Partiu-se de uma estrutura inteiramente constituída pelo material [1] e minimizou-se h_c para razões de volume de 15 % para [1] e 25 % para [2].

Apesar de utilizar os mesmo parâmetros e propriedades, como Huang usou elementos Quad4 e o programa macroescala usa elementos Quad8, os resultados não foram comparados quantitativamente. A Figura 4.25 apresenta a topologia final obtida, os elementos mais escuros correspondem ao material [1], os mais claros representam elementos vazios e o de cor intermediária representam o material [2].



Figura 4.25 – Topologia Otimizada para a Viga Biapoiada com 2 Materiais

O resultado obtido possui as mesmas características gerais do que o apresentado pela referência. Tem-se um contorno do material mais rígido com conexões internas do material menos rígido. A forma desse contorno, assim como a quantidade e disposição das conexões, são semelhantes ao resultado do artigo. O resultado coerente indica que o algoritmo desenvolvido para o BESO macroescala (multimaterial) foi implementado de forma adequada.

Buscou-se também avaliar se o programa desenvolvido é capaz de projetar mecanismos flexíveis, através da maximização do trabalho útil ou da transmitância mecânica para o caso microescala, tendo que $p_c = 0$. Considerou-se o seguinte problema, abordado em Maute e Frangopol (2003). Tem-se um domínio quadrado, no qual se aplicam forças horizontais e deseja-se que o mecanismo atue verticalmente, como ilustrado na Figura 4.26.

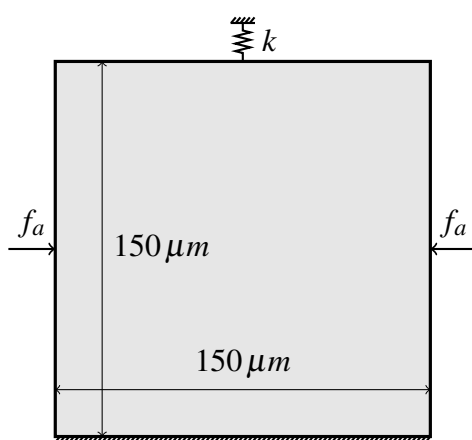


Figura 4.26 – Mecanismo Flexível

As forças são aplicadas no centro das laterais e a mola-objeto está no centro da extremidade superior, a extremidade inferior está engastada.

Como Maute e Frangopol (2003) utiliza um modelo de simulação, um tipo de elemento, um método de otimização e uma função-objeto distintos dos utilizados neste trabalho, não se buscou equivalência de resultados. Utilizou-se essa referência apenas para avaliar a coerência dos resultados do programa desenvolvido.

Sem implementar adaptações ao programa, iniciando o processo de otimização com uma topologia completamente sólida, ele não foi capaz de resolver o problema, já que a estrutura perde a conectividade com o engaste durante o processo. Para contornar essa dificuldade, considerou-se um problema semelhante, dado na Figura 4.27. Tendo em vista o resultado do artigo, este deve ter uma solução próxima à do primeiro.

Utilizou-se uma malha de 75×75 elementos, no caso não-linear, com $E_y^0 = 200 \text{ MPa}$ e $\nu = 0,3$. A carga e constante de mola foram $f_a = 2 \text{ N/m}$ e $k = 5000 \text{ kN/m}^2$. Otimizou-se a transmitância h_t para uma razão volumétrica alvo de 25 % para o material sólido. Os parâmetros de penalidade foram $z_{\min} = 10^{-3}$ e $p_s = 3$. Nessas condições obteve-se a topologia apresentada na Figura 4.28.

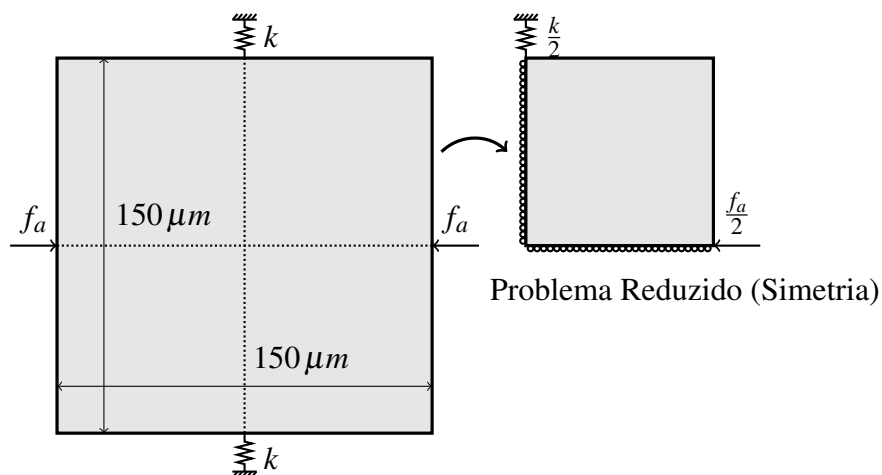


Figura 4.27 – Mecanismo Flexível Simétrico

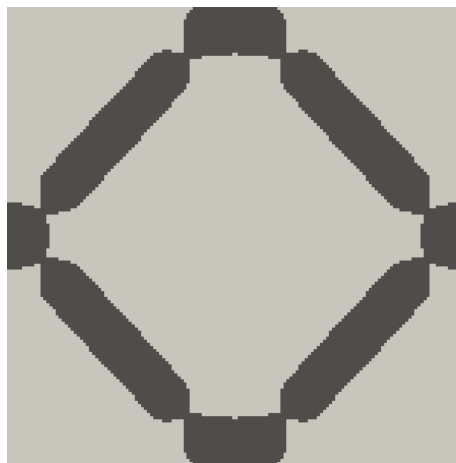


Figura 4.28 – Topologia Otimizada para o Mecanismo Flexível

Apesar de ligeiramente distinto do resultado de referência, após atingir o volume final, a função-objetivo aumentou sistematicamente até a convergência, indicando que a otimização foi realizada com sucesso. A topologia obtida apresenta uma característica interessante, nela, o trabalho é transmitido por barras, conectadas aos pontos de carga por articulações finas, que agem como pinos de rotação livre.

4.1.5 Modelo Representativo

Para verificar se o modelo proposto para representar as células na macroescala é razoável, avaliou-se o comportamento do atuador da Figura 4.15 utilizando o modelo representativo, com 2500 microelementos nas células e 192 macroelementos no atuador, e utilizando a topologia real (sem a aproximação proposta), com 480000 microelementos.

Essas topologias são apresentadas na Figura 4.29. No modelo representativo (a), tem-se o mesmo padrão de cores definido anteriormente; na topologia real (b), tem-se a parte sólida em escuro e a parte fluida em claro. Os parâmetros do problema não foram alterados,

exceto por p_v .

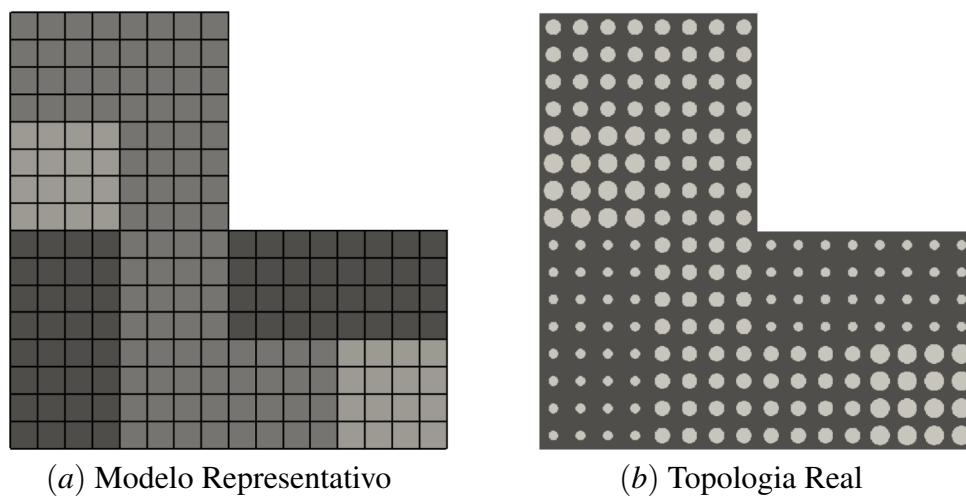


Figura 4.29 – Topologia Inicial do Atuador para Análise do Modelo

Usando o modelo representativo, o programa desenvolvido foi utilizado para realizar a otimização macroescala deste problema, mantendo-se a proporção entre as quantidades das células. A função-objetivo foi o trabalho útil h_o e o parâmetro de penalidade volumétrica utilizado foi de $p_v = 1,0$. Considerou-se uma espessura unitária para o atuador, apenas para não haver necessidade de carregar a notação explicitando que os resultados são "por metro".

O método convergiu em 25 iterações. A evolução da função-objetivo, calculada com o modelo representativo, é dada na Figura 4.30.

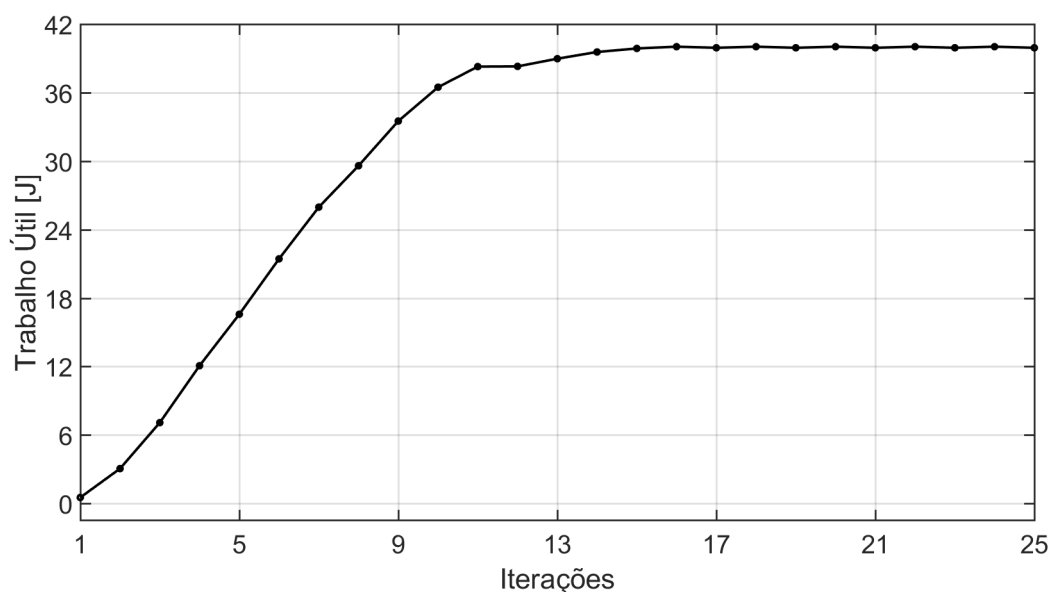


Figura 4.30 – Evolução da Função-Objetivo no Atuador para Análise do Modelo

Tem-se uma convergência suave e um aumento na função-objetivo em mais de 50 vezes. A Figura 4.31 apresenta a topologia final obtida.

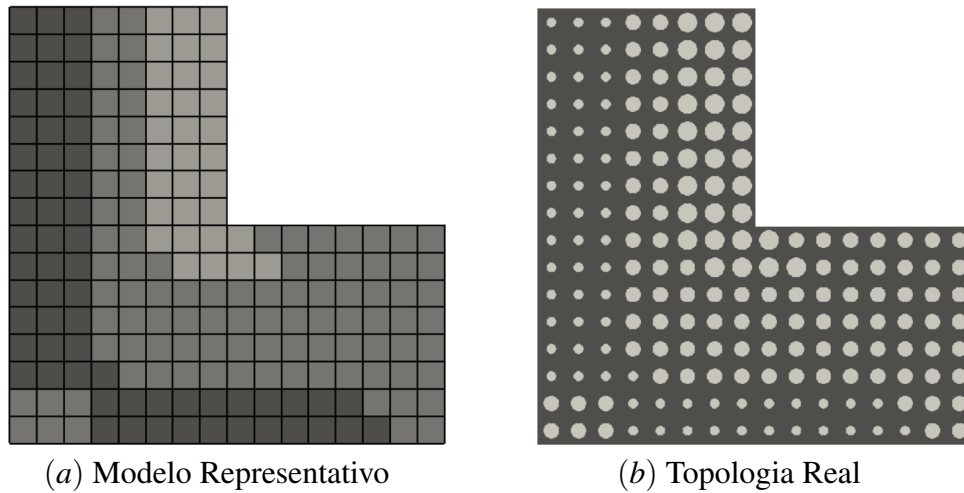


Figura 4.31 – Topologia Final do Atuador para Análise do Modelo

A Tabela 4.8 apresenta os valores de trabalho útil h_o e transmitância mecânica h_t para as topologias inicial e final, considerando a topologia real e o modelo representativo para diversos valores de p_v .

Tabela 4.8 – Valores de h_o e h_t no Atuador para Análise do Modelo

Caso	h_o Inicial [J]	h_o Final [J]	h_t Inicial [$\frac{J}{J}$]	h_t Final [$\frac{J}{J}$]
Topologia Real	$4,02 \cdot 10^{-1}$	$2,12 \cdot 10^1$	$2,87 \cdot 10^{-6}$	$1,51 \cdot 10^{-4}$
Modelo Representativo, $p_v = 0,5$	$5,47 \cdot 10^{-1}$	$4,04 \cdot 10^1$	$1,65 \cdot 10^{-6}$	$1,22 \cdot 10^{-4}$
Modelo Representativo, $p_v = 1,0$	$5,22 \cdot 10^{-1}$	$3,99 \cdot 10^1$	$1,95 \cdot 10^{-6}$	$1,49 \cdot 10^{-4}$
Modelo Representativo, $p_v = 2,0$	$4,85 \cdot 10^{-1}$	$3,87 \cdot 10^1$	$2,74 \cdot 10^{-6}$	$2,19 \cdot 10^{-4}$
Modelo Representativo, $p_v = 4,0$	$4,51 \cdot 10^{-1}$	$3,47 \cdot 10^1$	$5,56 \cdot 10^{-6}$	$4,27 \cdot 10^{-4}$
Modelo Representativo, $p_v = 8,0$	$4,97 \cdot 10^{-1}$	$2,20 \cdot 10^1$	$2,33 \cdot 10^{-5}$	$1,04 \cdot 10^{-3}$

Como se observa, a otimização utilizando o modelo representativo resultou de fato numa melhoria do objetivo para a topologia real. A ordem de grandeza de h_o é semelhante entre o modelo representativo e a topologia real, sendo mais próximos para valores mais elevados de p_v . Um valor elevado deste parâmetro implica em valores menores de rigidez equivalente para as células e, por consequência, menores vetores de carga.

Por outro lado, os valores de h_t pioram em muito quando p_v é elevado, isso ocorre pois valores demasiado reduzidos de rigidez distorcem o cálculo da energia de deformação dos elementos. Essa é uma característica do modelo proposto, que tenta garantir apenas a cinemática da célula. Um modelo mais adequado para se trabalhar com a transmitância buscaria definir um elemento representativo que conservasse a energia de deformação da célula.

De toda forma, esse resultado indica ser possível calibrar o parâmetro p_v para ter uma representação adequada para cada caso: um valor elevado para h_o e um valor próximo de 2,0 para h_t . Destacando que não se busca uma grande exatidão para o modelo, é suficiente que

este seja capaz de representar o problema qualitativamente, de forma a uma melhoria no modelo representativo implicar uma melhoria na topologia real.

Checou-se também se o campo de deslocamentos é coerente para cada caso. Observou-se um comportamento semelhante para todos os valores de p_v . Na Figura 4.32 têm-se os atuadores deformados para a topologia inicial, com $p_v = 1,0$ para o modelo representativo.

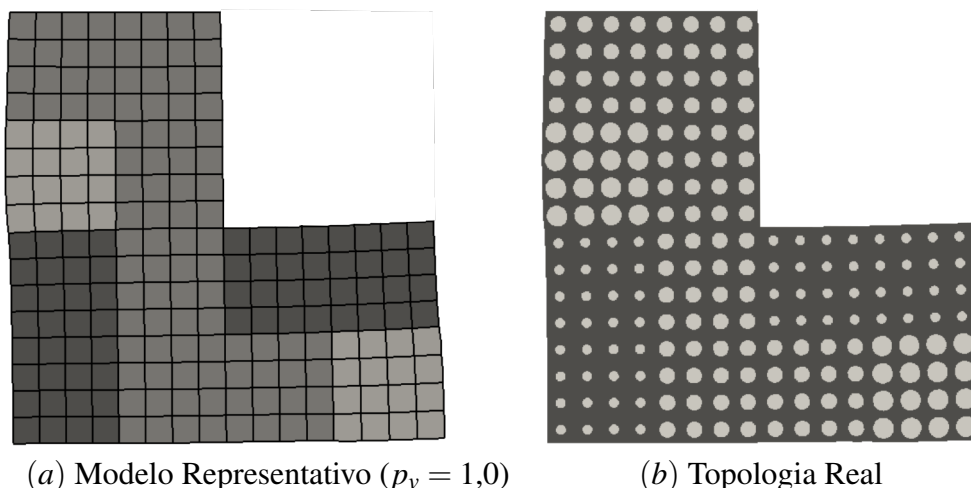


Figura 4.32 – Topologia Inicial Deformada do Atuador para Análise do Modelo

Na Figura 4.33 têm-se os atuadores deformados para a topologia final, com $p_v = 1,0$ para o modelo representativo.

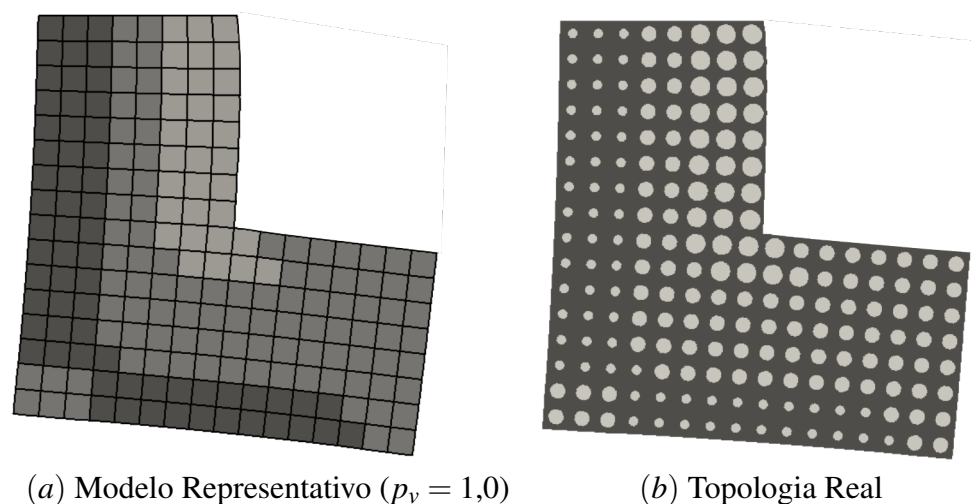


Figura 4.33 – Topologia Final Deformada do Atuador para Análise do Modelo

O que é mais relevante a ser avaliado é a cinemática do contorno dos atuadores, visto que as molas-objetivos são colocadas sempre nas bordas do domínio, como é coerente para um mecanismo em estado plano. Para este caso, obtiveram-se resultados muito satisfatórios para ambas as topologias.

Numa breve análise quantitativa, observou-se os deslocamentos máximos para cada caso. Na topologia real, tem-se que o deslocamento máximo foi de $0,047\text{ m}$ na topologia ini-

cial para $0,136m$ na final; no modelo com $p_v = 1,0$, tem-se que o deslocamento máximo foi de $0,063m$ para $0,190m$. Têm-se, assim como para h_o , valores e ganhos maiores no modelo representativo, mas ainda na mesma ordem de grandeza.

Uma cinemática mais realista implica valores de h_o mais acurados, entretanto, como apresentado, isso não ocorre com a função h_t . Assim, quando se deseja trabalhar com a transmitância, é preciso tomar um cuidado a mais selecionando um p_v que balanceie a acurácia da cinemática e a da função-objetivo h_t .

Um segundo caso foi considerado para avaliar a qualidade do modelo proposto. Considerou-se o atuador da Figura 4.18 utilizando o modelo representativo, com 2500 microelementos nas células e 45 macroelementos no atuador, e utilizando a topologia real (sem a aproximação), com 112500 microelementos.

As microtopologias são apresentadas na Figura 4.34, as partes escuras correspondem ao domínio sólido e as claras ao domínio fluido, a borda em destaque indica a parede celular imposta, de espessura $w_c = 1,4cm$.

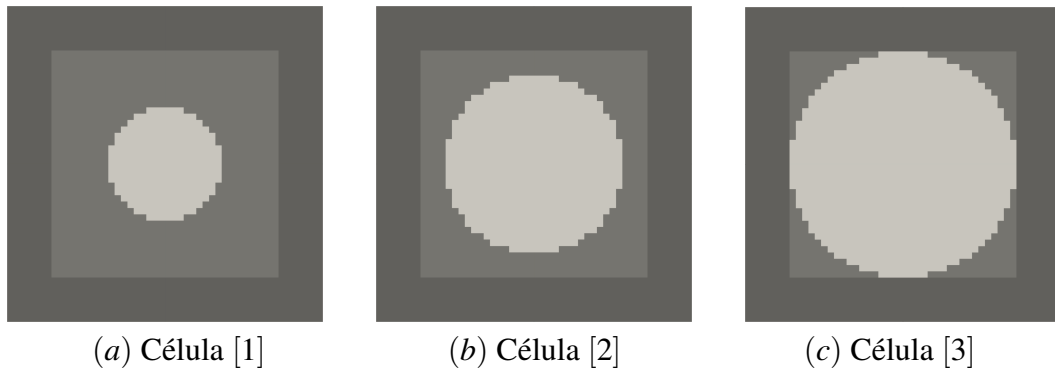


Figura 4.34 – Microtopologias Iniciais do Segundo Atuador para Análise

A topologia do atuador é apresentada na Figura 4.35. No modelo representativo (a) e na topologia real (b), utiliza-se o mesmo padrão de cores definido acima. Os parâmetros do problema não foram alterados, exceto por p_v .

Usando o modelo representativo, o programa multiescala foi utilizado para otimizar as microtopologias deste problema, mantendo-se as razões volumétricas de cada célula. A função-objetivo foi novamente h_o e o parâmetro de penalidade volumétrica foi de $p_v = 1,0$.

O método convergiu em 27 iterações. A evolução da função-objetivo, calculada com o modelo representativo, é dada na Figura 4.36. Destaca-se aqui que as três microtopologias são atualizadas simultaneamente em cada iteração.

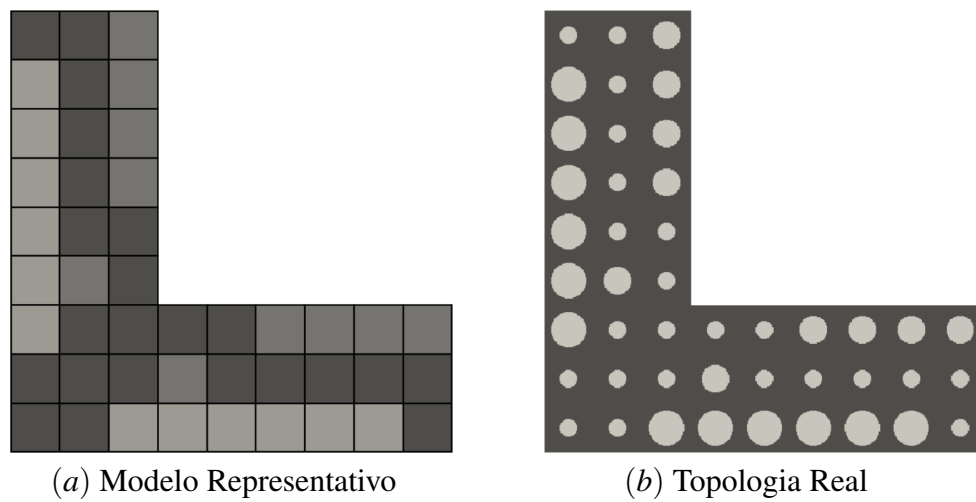


Figura 4.35 – Topologia Inicial do Segundo Atuador para Análise

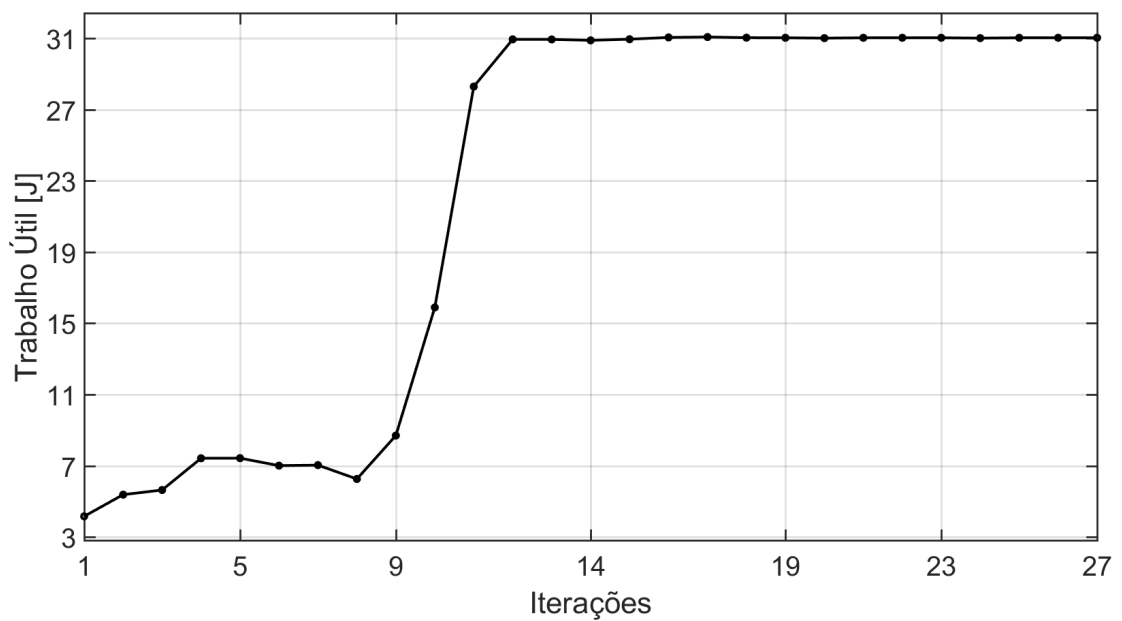


Figura 4.36 – Evolução da Função-Objetivo no Segundo Atuador para Análise

Após certa oscilação, o método convergiu e a função-objetivo aumentou em mais de 6 vezes. A Figura 4.37 apresenta as microtopologias finais obtidas.

A topologia final do atuador é apresentada na Figura 4.38.

A Tabela 4.9 mostra os valores de trabalho útil h_o e transmitância mecânica h_t para as topologias inicial e final, considerando a topologia real e o modelo representativo para diversos valores de p_v .

Aqui, a acurácia do modelo foi consideravelmente pior. Contudo, o aumento de h_o no modelo representativo implicou novamente o aumento de h_o na topologia real.

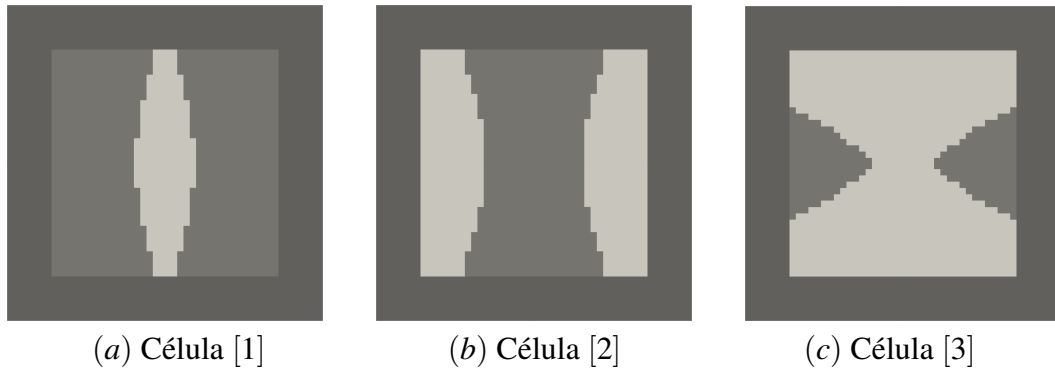


Figura 4.37 – Microtopologias Finais do Segundo Atuador para Análise

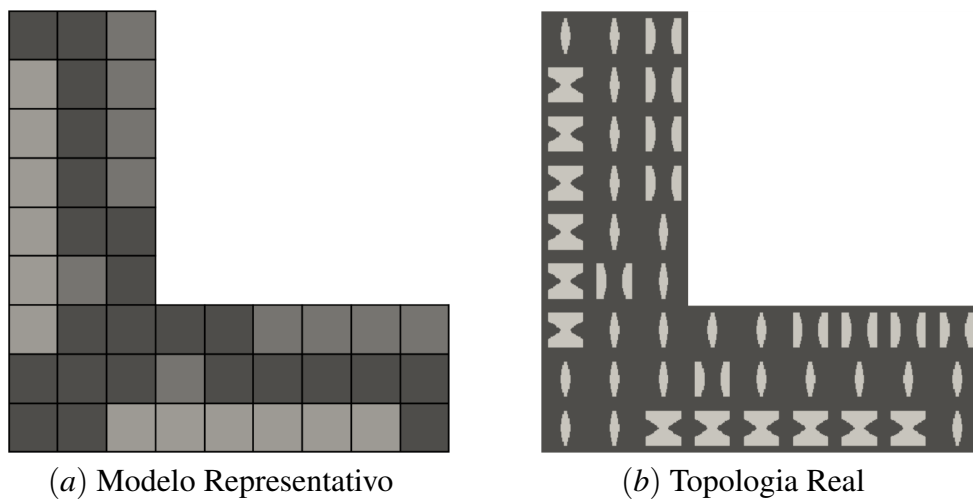


Figura 4.38 – Topologia Final do Segundo Atuador para Análise

Tabela 4.9 – Valores de h_o e h_t no Segundo Atuador para Análise

Caso	h_o Inicial [J]	h_o Final [J]	h_t Inicial [$\frac{J}{J}$]	h_t Final [$\frac{J}{J}$]
Topologia Real	$1,62 \cdot 10^0$	$5,30 \cdot 10^0$	$4,92 \cdot 10^{-5}$	$6,26 \cdot 10^{-5}$
Modelo Representativo, $p_v = 0,5$	$4,51 \cdot 10^0$	$3,31 \cdot 10^1$	$4,96 \cdot 10^{-5}$	$3,34 \cdot 10^{-5}$
Modelo Representativo, $p_v = 1,0$	$4,17 \cdot 10^0$	$3,10 \cdot 10^1$	$5,88 \cdot 10^{-5}$	$3,92 \cdot 10^{-5}$
Modelo Representativo, $p_v = 2,0$	$3,44 \cdot 10^0$	$2,66 \cdot 10^1$	$7,88 \cdot 10^{-5}$	$5,17 \cdot 10^{-5}$
Modelo Representativo, $p_v = 4,0$	$2,00 \cdot 10^0$	$1,78 \cdot 10^1$	$1,14 \cdot 10^{-4}$	$7,65 \cdot 10^{-5}$
Modelo Representativo, $p_v = 8,0$	$4,32 \cdot 10^{-1}$	$7,39 \cdot 10^0$	$1,09 \cdot 10^{-4}$	$1,14 \cdot 10^{-4}$

Este caso evidencia que o modelo proposto é realmente inadequado para se trabalhar com h_t , já que para quase todos os valores avaliados de p_v tem-se uma piora na transmitância do modelo representativo, enquanto ela melhora na topologia real. Destaca-se que isso não impede a utilização dessa função-objetivo para otimizações microescala.

Checou-se também se o campo de deslocamentos é coerente. A cinemática obtida é semelhante para todos os valores de p_v . Na Figura 4.39 têm-se os atuadores deformados para a topologia inicial, com $p_v = 1,0$ para o modelo representativo.

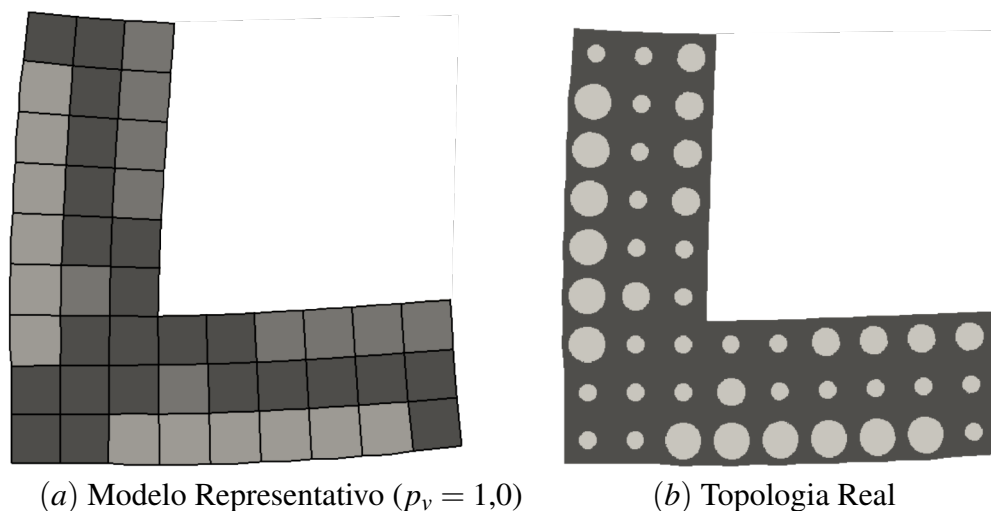


Figura 4.39 – Topologia Inicial Deformada do Segundo Atuador para Análise

Na Figura 4.40 têm-se os atuadores deformados para a topologia final, com $p_v = 1,0$ para o modelo representativo.

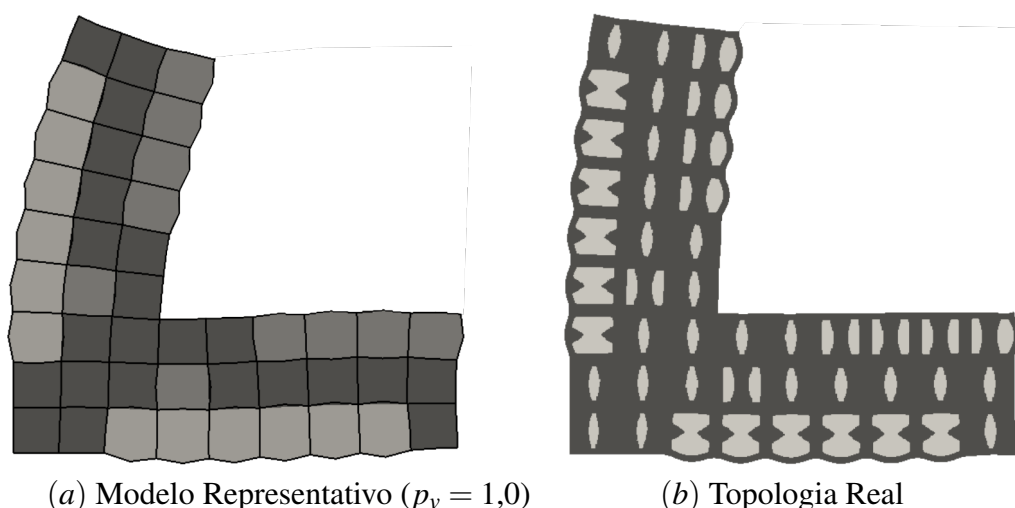


Figura 4.40 – Topologia Final Deformada do Segundo Atuador para Análise

Os resultados foram satisfatórios. Na topologia real, tem-se que o deslocamento máximo foi de $0,029m$ na topologia inicial para $0,066m$ na final; no modelo com $p_v = 1,0$, tem-se que o deslocamento máximo foi de $0,047m$ para $0,158m$.

Em resumo, o modelo mostrou-se razoável para obter cinemáticas aproximadas dos dois problemas avaliados, especialmente para valores elevados do parâmetro p_v . Tem-se que a aproximação razoável na cinemática implica uma aproximação razoável para o trabalho útil realizado pela estrutura. No segundo problema destacou-se a deficiência do modelo proposto em avaliar de forma consistente a transmitância mecânica.

Independentemente da precisão representativa do modelo, o algoritmo implementado, tanto para a macrotopologia quanto para as microtopologias, otimizou com sucesso as

estruturas dadas pelo modelo multiescala proposto, como se observou pelas curvas de evolução da função-objetivo.

Destaca-se que a diferença entre tempos de análise das topologias reais e das simplificadas pelo modelo é enorme. Como a simulação do sistema deve ser realizada algumas dezenas de vezes durante o processo de otimização, o modelo representativo viabiliza a concepção de atuadores compostos por uma grande quantidade de células.

4.2 Problemas Abordados

O programa desenvolvido foi utilizado para abordar uma série de problemas propostos. Considerou-se um material fictício com módulo de Young $E_y^0 = 200\text{MPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e utilizaram-se malhas cartesianas uniformes, de elementos quadrados. Nos atuadores unicelulares (subseção 4.2.1) e na microescala dos problemas mais gerais, utilizaram-se elementos Quad4; na macroescala dos atuadores celulares, utilizaram-se elementos Quad8. Em todos os casos considerou-se o modelo de Hencky, em estado plano de tensões. As integrações numéricas foram feitas com 9 pontos de Gauss (3 por dimensão).

O computador utilizado para a execução do programa possui processador *Intel Core i7-4770* com 8 núcleos e $3,40\text{GHz}$; RAM de $15,6\text{GB}$; e *Ubuntu 16.04* como sistema operacional. Nas avaliações de tempo de execução, desconsiderou-se o tempo gasto na plotagem dos resultados.

4.2.1 Atuadores Unicelulares

Foram concebidas células que se expandem em direções determinadas. Para isso, partiu-se da topologia apresentada na Figura 4.41 e, mantendo-se a fração volumétrica de sólido constante, otimizou-se cada função-objetivo: trabalho útil h_o e transmitância mecânica h_t .

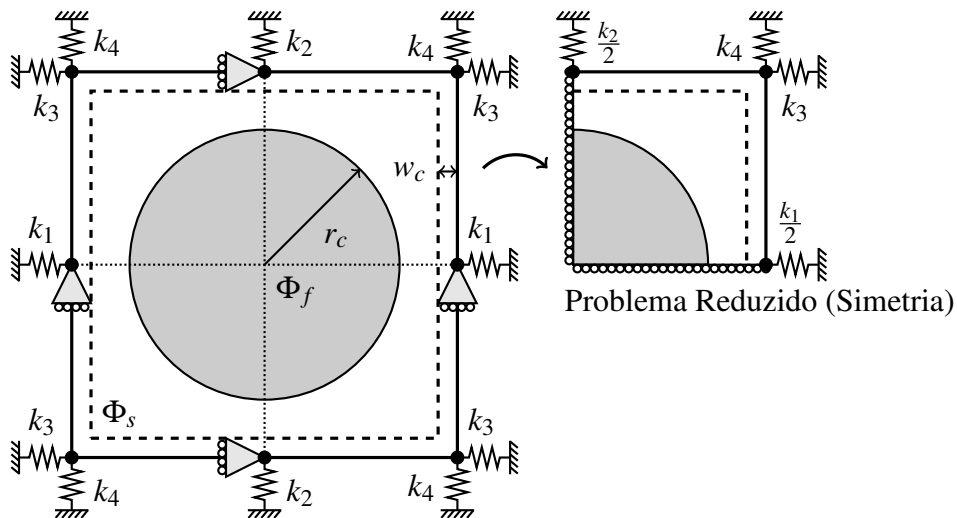


Figura 4.41 – Topologia Inicial dos Atuadores Unicelulares Considerados

As dimensões da célula são de $2 \times 2 \text{ cm}$, a espessura de parede celular vale $w_c = 0,1 \text{ cm}$ e o raio da cavidade circular é de $r_c = 0,7 \text{ cm}$. Logo, a fração volumétrica de sólido na topologia é de 61,5 % (52,5 % considerando somente o domínio de trabalho, sem as paredes celulares).

A célula foi discretizada em uma malha de 200×200 elementos, assim, o problema reduzido consiste numa malha de 100×100 . A pressão aplicada foi de $p_c = 100 \text{ kPa}$ e as constantes de mola foram definidas de forma distinta para cada caso, dependendo das características que se desejam obter nas células otimizadas.

No primeiro caso considerado, buscou-se maximizar a expansão completa da célula, nas direções vertical, horizontal e diagonal. Isso foi feito definindo-se $k_1 = k_2 = 2 \text{ kN/m}^2$ e $k_3 = k_4 = 1 \text{ kN/m}^2$. O valor máximo de adição de sólido por iteração foi $AR = 2 \%$; os parâmetros de convergência foram $n_c = 6$ e $\tau = 0,2 \%$; o raio do filtro suavizador foi $\check{r}_{\max} = 0,05 \text{ cm}$; e o valor mínimo de densidade elementar foi $z_{\min} = 5 \cdot 10^{-4}$. Dois pares de expoentes de penalidade foram utilizados: $p_s = 1,10$ e $p_p = 1,05$; e $p_s = 1,30$ e $p_p = 0,70$.

A Figura 4.42 apresenta os resultados para o primeiro par de expoentes. As topologias obtidas para ambas as funções-objetivo são semelhantes. Com esses parâmetros, o método buscou soluções triviais, nas quais as cavidades de fluido são posicionadas ao lado das molas-objetivo.



(a) Trabalho Útil h_o



(b) Transmitância Mecânica h_t

Figura 4.42 – Atuadores Unicelulares de Expansão Completa ($p_s = 1,10$, $p_p = 1,05$)

A Figura 4.43 apresenta o resultado para o segundo par de expoentes. Aqui, houve um comportamento distinto na otimização do trabalho útil: construiu-se uma forma que cria articulações finas conectando as partes sólidas.

No segundo caso considerado, buscou-se maximizar a expansão da célula nas direções vertical e horizontal. Isso foi feito definindo-se $k_1 = k_2 = 2 \text{ kN/m}^2$ e $k_3 = k_4 = 0$. Os parâmetros utilizados foram os mesmos do caso anterior.

Os resultados obtidos foram iguais aos do primeiro caso. Isso indica que, para esse conjunto de parâmetros, as molas dos cantos não afetam a evolução da topologia.

(a) Trabalho Útil h_o (b) Transmitância Mecânica h_t Figura 4.43 – Atuadores Unicelulares de Expansão Completa ($p_s = 1,30$, $p_p = 0,70$)

Para otimizar a expansão diagonal da célula, considerou-se $k_1 = k_2 = 0$ e $k_3 = k_4 = 1 \text{ kN/m}^2$. Nesse caso, para a otimização da transmitância com par de parâmetros $p_s = 1,30$ e $p_p = 0,70$, o raio do filtro suavizador foi aumentado em três vezes para garantir a convergência do método. O restante dos parâmetros não foi alterado.

A Figura 4.44 apresenta os resultados para o primeiro par de expoentes. Novamente construíram-se topologias com articulações finas conectando as partes sólidas. No caso da transmitância, criou-se uma ilha de sólido no centro da célula, o que não é desejável. Essa ilha não influencia o comportamento da célula e poderia ser substituída por fluido sem nenhum efeito na cinemática do restante da estrutura. É como se a fração volumétrica de sólido estrutural fosse redefinida para um valor menor do que o estipulado, o que pode causar inconsistências na análise dos resultados. Por esses motivos, soluções desse tipo foram consideradas inválidas neste trabalho.

(a) Trabalho Útil h_o (b) Transmitância Mecânica h_t Figura 4.44 – Atuadores Unicelulares de Expansão Diagonal ($p_s = 1,10$, $p_p = 1,05$)

A Figura 4.45 apresenta o resultado para o segundo par de expoentes. Os resultados são semelhantes, uma cavidade em cruz. Há diferenças claras nas extremidades e na concavidade das cavidades. Para esses expoentes, não ocorreram ilhas de sólido.

(a) Trabalho Útil h_o (b) Transmitância Mecânica h_t Figura 4.45 – Atuadores Unicelulares de Expansão Diagonal ($p_s = 1,30$, $p_p = 0,70$)

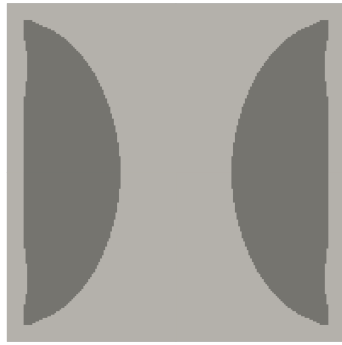
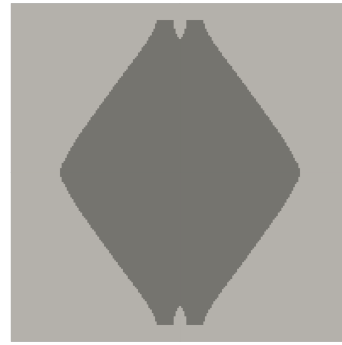
No último caso considerado, buscou-se maximizar a expansão lateral da célula. Isso foi feito definindo-se $k_1 = 2 \text{ kN/m}^2$, $k_3 = 1 \text{ kN/m}^2$ e $k_2 = k_4 = 0$. Os parâmetros utilizados foram os mesmos.

A Figura 4.46 apresenta os resultados para o primeiro par de expoentes. Obteve-se um comportamento distinto para cada função-objetivo. Novamente, ou a solução foi trivial, com as cavidades de fluido próximas às molas (a); ou a solução correspondeu a gerar pontos de articulação fina que favorecem o movimento desejado (b).

(a) Trabalho Útil h_o (b) Transmitância Mecânica h_t Figura 4.46 – Atuadores Unicelulares de Expansão Lateral ($p_s = 1,10$, $p_p = 1,05$)

A Figura 4.47 apresenta o resultado para o segundo par de expoentes. A variação dos expoentes causou pequenas alterações nas formas das cavidades das topologias otimizadas, mas as características gerais se mantiveram.

Em todos os casos as funções-objetivo aumentaram de valor substancialmente durante o processo de otimização. A Tabela 4.10 apresenta, para cada tipo de célula, os valores de trabalho útil para a topologia inicial e otimizada, com os dois pares de expoentes utilizados.

(a) Trabalho Útil h_o (b) Transmitância Mecânica h_t Figura 4.47 – Atuadores Unicelulares de Expansão Lateral ($p_s = 1,30$, $p_p = 0,70$)Tabela 4.10 – Valores de h_o nos Atuadores Unicelulares

Expansão	h_o Inicial [J]	$p_s = 1,10$ e $p_p = 1,05$ h_o Final [J]	$p_s = 1,30$ e $p_p = 0,70$ h_o Final [J]
Completa	$1,31 \cdot 10^{-7}$	$1,23 \cdot 10^{-4}$	$7,27 \cdot 10^{-5}$
Vertical e Horizontal	$1,05 \cdot 10^{-7}$	$1,32 \cdot 10^{-4}$	$7,00 \cdot 10^{-5}$
Diagonal	$2,61 \cdot 10^{-8}$	$3,31 \cdot 10^{-7}$	$5,64 \cdot 10^{-7}$
Lateral	$6,55 \cdot 10^{-8}$	$1,86 \cdot 10^{-4}$	$9,94 \cdot 10^{-4}$

A Tabela 4.11 apresenta os valores de transmitância mecânica.

Tabela 4.11 – Valores de h_t nos Atuadores Unicelulares

Expansão	h_t Inicial [$\frac{J}{J}$]	$p_s = 1,10$ e $p_p = 1,05$ h_t Final [$\frac{J}{J}$]	$p_s = 1,30$ e $p_p = 0,70$ h_t Final [$\frac{J}{J}$]
Completa	$2,27 \cdot 10^{-5}$	$9,05 \cdot 10^{-4}$	$1,42 \cdot 10^{-3}$
Vertical e Horizontal	$1,83 \cdot 10^{-5}$	$9,44 \cdot 10^{-4}$	$1,51 \cdot 10^{-3}$
Diagonal	$4,56 \cdot 10^{-6}$	$1,95 \cdot 10^{-5}$	$1,93 \cdot 10^{-5}$
Lateral	$1,14 \cdot 10^{-5}$	$1,65 \cdot 10^{-4}$	$1,81 \cdot 10^{-4}$

Em todos esses casos, a função-objetivo cresceu de forma bem comportada durante todo o processo de otimização. A Figura 4.48 apresenta a curva de evolução do trabalho útil h_o e algumas das topologias intermediárias, para o caso da célula de expansão vertical e horizontal. Aqui, os parâmetros usados na otimização de h_o foram $p_s = 1,30$ e $p_p = 0,70$.

O método convergiu em 65 iterações. Em torno da iteração 15, a cavidade já assume o formato em "X". Dessa até a iteração 32, as pontas da cavidade avançam até os limites do domínio de trabalho e a função-objetivo atinge valores próximos do da topologia final. As últimas 33 iterações consistem em pequenas alterações, com incrementos sutis no trabalho útil.

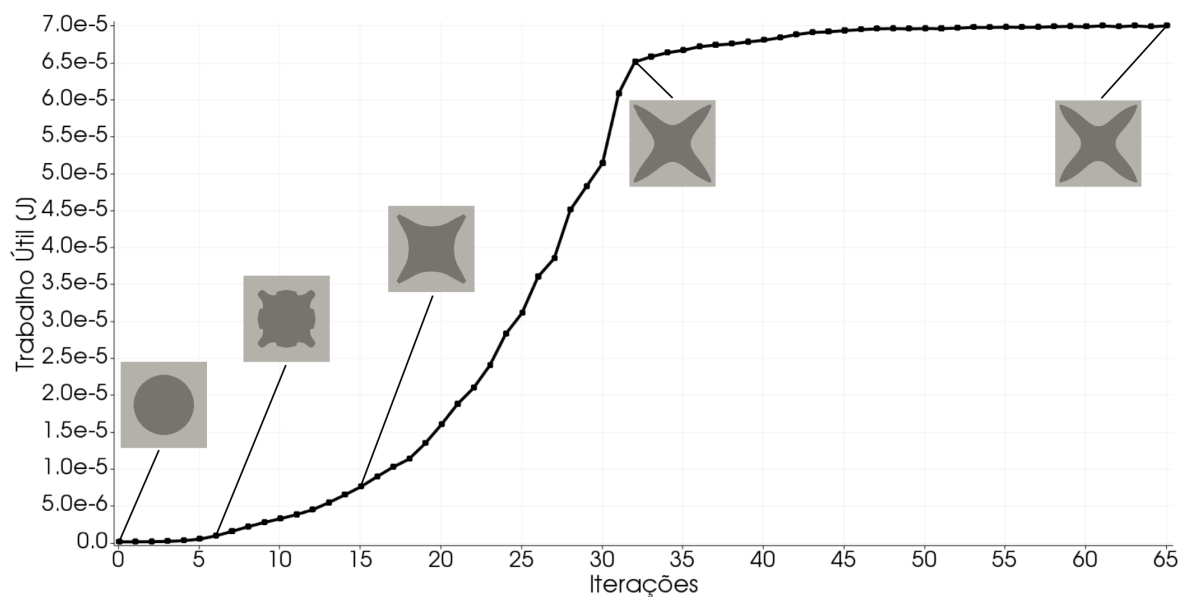


Figura 4.48 – Evolução da Função-Objetivo na Célula de Expansão Vertical e Horizontal

A Figura 4.49 e a Figura 4.50 apresentam, para as topologias inicial e final, a célula em repouso (*a*), deformada pela carga usada na otimização (*b*) e deformada por uma carga cinco vezes maior (*c*).

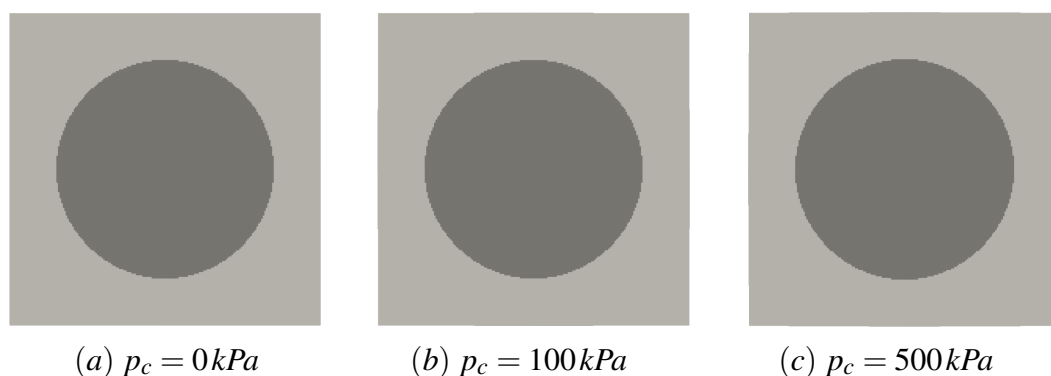


Figura 4.49 – Célula de Expansão Vertical e Horizontal Deformada - Inicial

A topologia inicial, com cavidade circular, é muito ineficaz. Essa geometria minimiza as cargas e não fornece áreas de baixa rigidez, como as articulações finas que surgem nas topologias otimizadas. Os carregamentos considerados não produzem deformação relevante nessa estrutura: o deslocamento máximo para $p_c = 100 \text{ kPa}$ foi de $12 \mu\text{m}$ e para $p_c = 500 \text{ kPa}$ foi de $60 \mu\text{m}$.

Por outro lado, na topologia otimizada, as deformações podem ser notadas visualmente: o deslocamento máximo para $p_c = 100 \text{ kPa}$ foi de $266 \mu\text{m}$ e para $p_c = 500 \text{ kPa}$ foi de $1184 \mu\text{m}$.

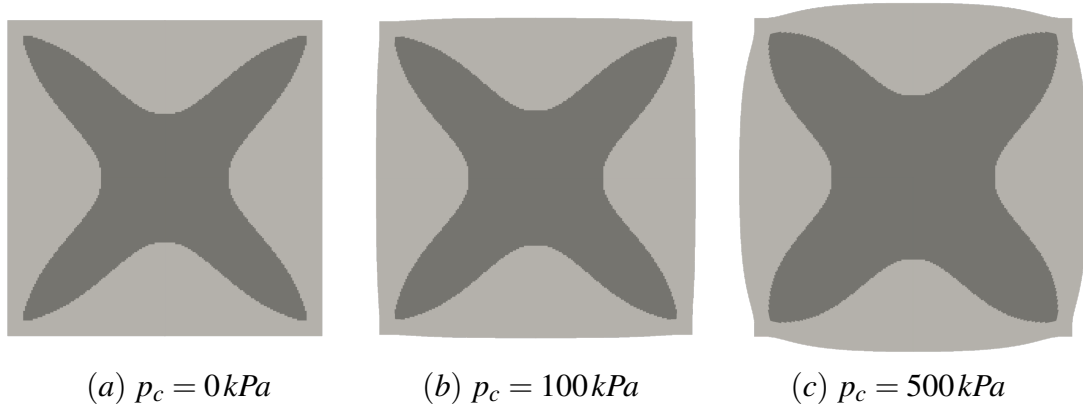


Figura 4.50 – Célula de Expansão Vertical e Horizontal Deformada - Final

Na máquina utilizada, o programa levou cerca de 140 segundos para realizar essa otimização, usando 4 núcleos nos trechos paralelizados. O tempo utilizado no cálculo e realização do *assembly* de matrizes tangentes e vetores resíduos foi de 77 segundos (55 % do tempo total). Nas etapas de análise, a resolução dos sistemas lineares do método de Newton-Raphson levou 35 segundos (25 % do tempo), foram cerca de 260 sistemas (4 por iteração do BESO) de dimensão 20200. O tempo usado nas análises de sensibilidades foi de 25 segundos (18 % do tempo), nessa etapa, resolve-se 1 sistema linear por iteração do BESO, foram 65 ao todo, também de dimensão 20200. O tempo gasto na obtenção da matriz de filtro foi de 3 segundos (2 % do tempo). O restante das operações não teve impacto relevante no tempo de execução do programa.

Esse mesmo programa levou 336 segundos para ser executado em um único núcleo. Nesse caso, o *speedup* da paralelização utilizada foi de 2,4.

Das células obtidas, selecionaram-se algumas para serem utilizadas na otimização macroescala realizada nas subseções seguintes, apresentadas na Figura 4.51.

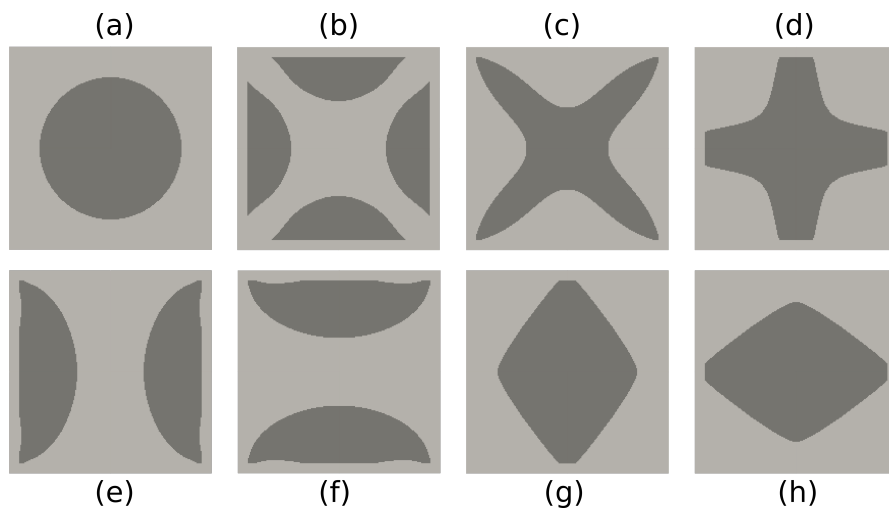


Figura 4.51 – Células Utilizadas na Otimização Macroescala

A célula de cavidade circular (a) corresponde à topologia inicial utilizada aqui; a

célula de 4 cavidades (*b*) é a obtida nos dois primeiros casos, na otimização de transmitância com o segundo par de expoentes (Figura 4.43b); a célula de cavidade em "X" (*c*) é a obtida nos dois primeiros casos, na otimização de trabalho com o segundo par de expoentes (Figura 4.43a); a célula com cavidade em cruz (*d*) é a obtida no terceiro caso, na otimização de trabalho com o primeiro par de expoentes (Figura 4.44a); as células de 2 cavidades (*e*) e (*f*) correspondem à obtida no quarto caso, na otimização de trabalho com o segundo par de expoentes (Figura 4.47a); e as células com cavidade losangular (*g*) e (*h*) correspondem à obtida no quarto caso, na otimização de transmitância com o primeiro par de expoentes (Figura 4.46b).

Além dessas, células básicas também foram utilizadas: completamente sólida e completamente vazia.

4.2.2 Estruturas Reativas

A primeira categoria de mecanismos celulares abordada foi a concepção de estruturas reativas, que são estruturas que devem reagir a cargas variáveis, minimizando o deslocamento de um ponto de interesse. Consideraram-se vigas nas quais se ajusta a pressão do fluido buscando anular o deslocamento no ponto de aplicação de carga.

Utilizaram-se células com as mesmas dimensões consideradas acima, de $2 \times 2 \text{ cm}$, com malhas de 200×200 microelementos. Considerou-se a viga engastada-livre apresentada na Figura 4.52.

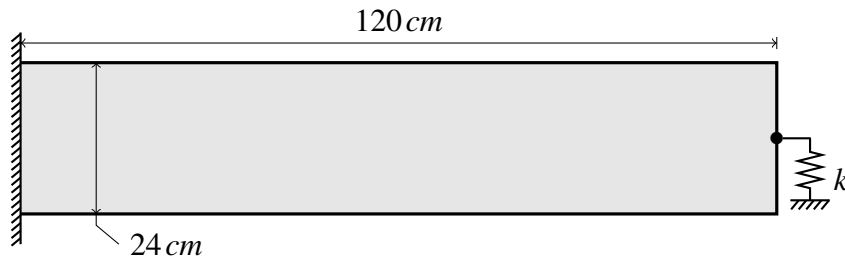


Figura 4.52 – Viga Engastada-Livre Reativa

Essa viga deve suportar uma carga pontual vertical aplicada no centro da extremidade livre. Consideraram-se três tipos de células em quantidades iguais. Assim, a viga é composta por 720 células, havendo 240 de cada tipo.

O primeiro caso considerado foi uma otimização macroescala, utilizando uma célula completamente sólida, uma célula completamente vazia e a célula de cavidade em "X" (Figura 4.51c) obtida na subseção anterior.

A constante de mola foi $k = 1 \text{ kN/m}^2$; a pressão aplicada foi $p_c = 100 \text{ kPa}$; os parâmetros que limitam as alterações de topologia foram $AR^p = AR^q = 2\%$; os parâmetros de convergência foram $n_c = 6$ e $\tau = 0,01\%$; o raio do filtro suavizador foi $\hat{r}_{\max} = 5 \text{ cm}$; os valores

mínimos de densidade foram $x_{\min} = y_{\min} = z_{\min} = 5.10^{-4}$; e os expoentes de penalidade foram $p_s = p_s^x = p_s^y = 1,10$ e $p_p = p_p^x = p_p^y = 1,30$.

Apesar de o modelo representativo ser mais acurado para valores elevados de p_v , neste caso composto por elementos extremos – um vazio de rigidez mínima e um sólido de rigidez máxima – foi preciso utilizar um p_v reduzido, de 1,10, para garantir a convergência do programa.

Estabeleceram-se as cores roxa, verde e vermelha para simbolizar cada uma das células, de acordo com a Figura 4.53.



Figura 4.53 – Células da Otimização de Estruturas Reativas - Primeiro Caso

A Figura 4.54 apresenta a macrotopologia inicial (a) utilizada e a obtida pelo programa (b) após o processo de otimização macroescala.

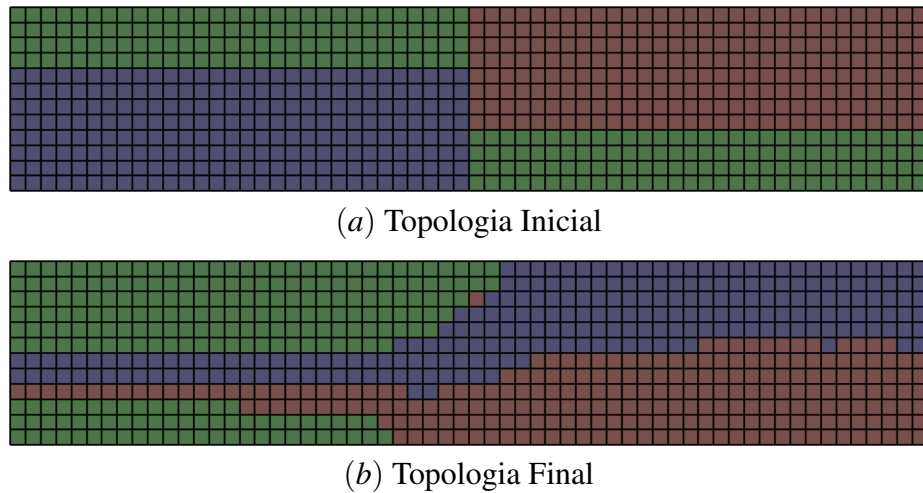


Figura 4.54 – Macrotopologias da Otimização de Estruturas Reativas - Primeiro Caso

Nota-se que se reduziu o contato com o engaste, minimizando a resistência das restrições mecânicas ao movimento da estrutura. Além disso, as células atuantes foram posicionadas abaixo e as células sólidas acima, isso faz com que a parte inferior da estrutura expanda e a parte superior contraia, promovendo o movimento de ascensão desejado.

Em seguida, considerou-se outra otimização macroescala, utilizando as células de cavidades losangulares (Figura 4.51g e Figura 4.51h) e a célula com cavidade em cruz (Figura 4.51d).

Nesse caso, utilizou-se uma pressão de $p_c = 500\text{kPa}$ e expoentes $p_p = p_p^x = p_p^y = 1,05$. O valor de p_v foi triplicado, para 3,30. O restante dos parâmetros não foi alterado.

Define-se o mesmo padrão de cores, ilustrado na Figura 4.55.

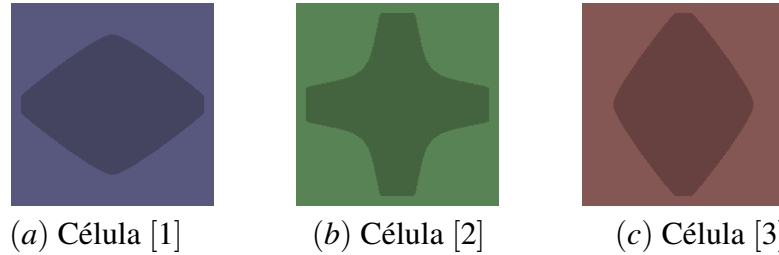


Figura 4.55 – Células da Otimização de Estruturas Reativas - Segundo Caso

A Figura 4.56 apresenta a macrotopologia inicial (a) utilizada e a obtida pelo programa (b) após o processo de otimização macroescala.

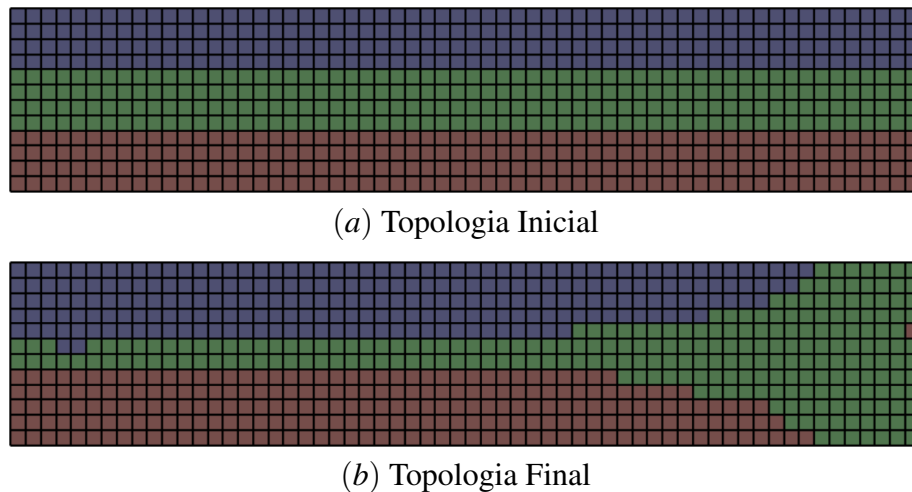


Figura 4.56 – Macrotopologias da Otimização de Estruturas Reativas - Segundo Caso

Aqui, partiu-se de uma topologia intuitiva, com as células que expandem lateralmente na camada inferior, as células que expandem verticalmente na camada superior e as células de expansão diagonais na camada central.

A topologia otimizada manteve essa característica. Contudo, a espessura de cada camada passou a variar ao longo da viga. As camadas mais relevantes ao movimento, inferior e superior, foram concentradas no lado do engaste. Isso provoca maiores flexões nos entornos da extremidade fixa, favorecendo a atuação desejada.

Realizou-se então uma otimização microescala, mantendo a macrotopologia fixa e iniciando com células iguais, todas de cavidade circular (Figura 4.51d).

A pressão aplicada foi de $p_c = 50\text{kPa}$; o raio do filtro foi $\check{r}_{\max} = 0,05\text{ cm}$; e o valor máximo de adição de sólido por iteração foi $AR = 2\%$.

A macrotopologia utilizada foi a inicial do caso anterior, dada na Figura 4.56a. As microtopologias iniciais são dadas na Figura 4.57.

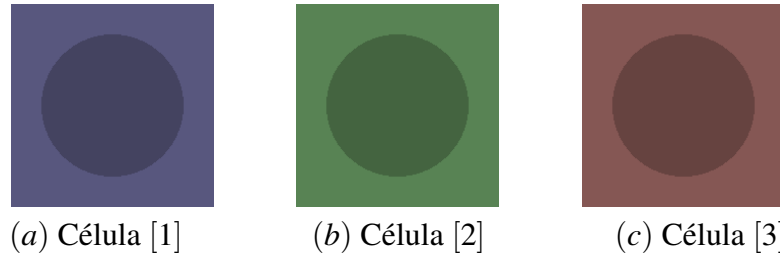


Figura 4.57 – Células Iniciais da Otimização de Estruturas Reativas - Terceiro Caso

A Figura 4.58 apresenta o resultado após o processo de otimização microescala.

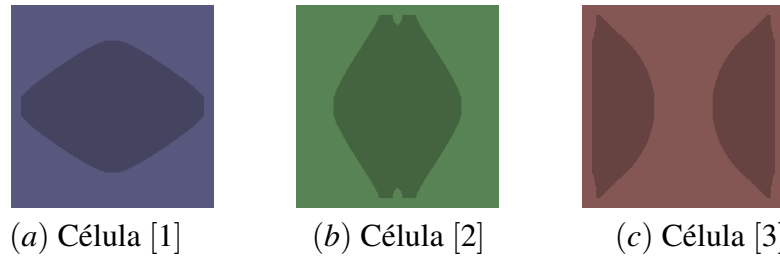


Figura 4.58 – Células Finais da Otimização de Estruturas Reativas - Terceiro Caso

A topologia inicial corresponde a um atuador ineficaz: pela sua simetria, o trabalho útil nele vale 0. Na solução obtida, têm-se células de expansão lateral na camada inferior e células de expansão vertical na camada superior. Menos intuitivo, o resultado para a célula da camada central foi um outro tipo de célula de expansão lateral.

No último caso, partiu-se do resultado da otimização microescala e realizou-se uma otimização multiescala, na qual a macrotopologia é otimizada em conjunto com as microtopologias das células.

Aqui, alterou-se o valor de AR para 5%; e os parâmetros de convergência foram $n_c = 15$ e $\tau = 0,00001\%$. Após cada iteração na macroescala (atualização de x e y), realizaram-se 4 iterações consecutivas na microescala (atualização de $z^{[1]}$, $z^{[2]}$ e $z^{[3]}$).

A macrotopologia inicial foi a mesma do segundo caso, dada na Figura 4.56a. As microtopologias iniciais foram as soluções do terceiro caso, dadas na Figura 4.58.

A Figura 4.59 apresenta as microtopologias após a otimização multiescala. E a Figura 4.60 apresenta o resultado para a macrotopologia.

As células de número 1 e 3 não tiveram mudanças relevantes, contudo a célula de número 2 alterou-se, tornando-se bastante similar à célula 3. Por sua vez, a macrotopologia obtida é muito próxima à do segundo caso (Figura 4.56b). A solução obtida favorece a expansão lateral na maior parte da estrutura, mantendo uma camada superior com células de expansão vertical.

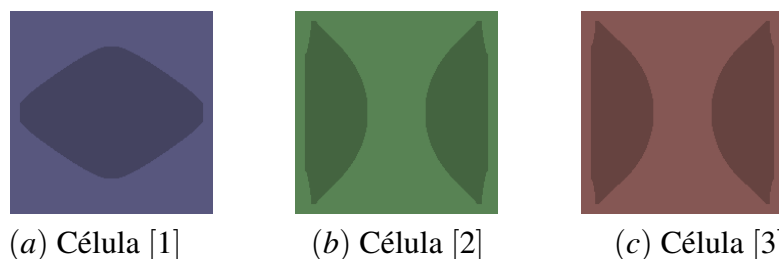


Figura 4.59 – Células Finais da Otimização de Estruturas Reativas - Quarto Caso

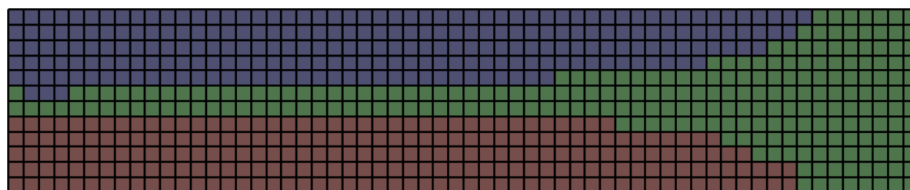


Figura 4.60 – Macrotopologia Final da Otimização de Estruturas Reativas - Quarto Caso

Em seguida, considerou-se a viga biapoiada apresentada na Figura 4.61.

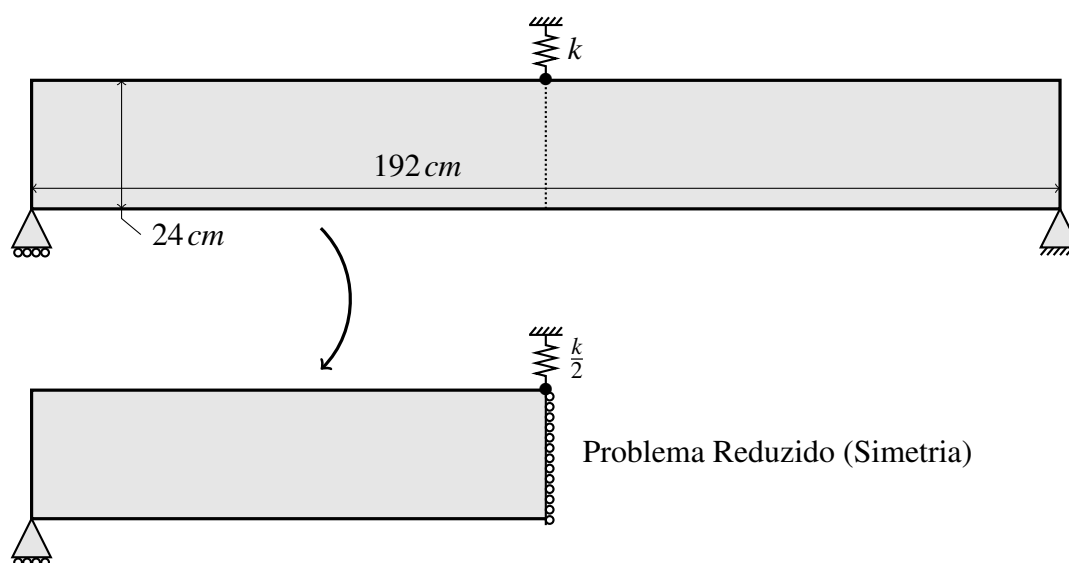


Figura 4.61 – Viga Biapoiada Reativa

Essa viga deve suportar uma carga pontual vertical aplicada sobre ela, na posição central. Novamente, consideraram-se três tipos de células em quantidades iguais. Assim, a viga é composta por 1152 células, havendo 384 de cada tipo. Pela simetria do problema, considera-se apenas metade desse domínio, composto por 576 células.

Dois casos foram considerados para esse problema: uma otimização microescala, com macrotopologia fixa; e uma otimização multiescala.

Na otimização microescala, partiu-se de células de cavidade circular, assim como no terceiro caso (Figura 4.57); a Figura 4.62 apresenta a macrotopologia utilizada.

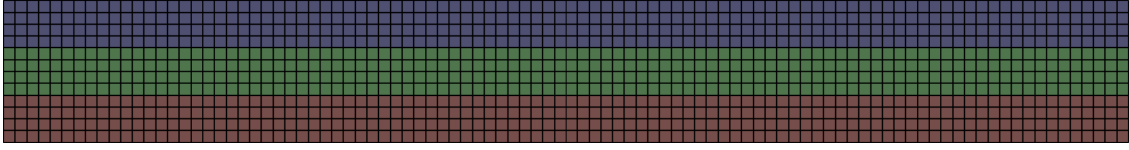


Figura 4.62 – Macrotopologia da Otimização de Estruturas Reativas - Quinto Caso

A constante de mola foi $k = 2 \text{ kN/m}^2$; a pressão aplicada foi $p_c = 50 \text{ kPa}$; os parâmetros que limitam as alterações de topologia foram $AR = 5 \%$ e $AR^p = AR^q = 2 \%$; os parâmetros de convergência foram $n_c = 6$ e $\tau = 0,01 \%$; o raio do filtro suavizador foi $\hat{r}_{\max} = 5 \text{ cm}$; os valores mínimos de densidade foram $x_{\min} = y_{\min} = z_{\min} = 5 \cdot 10^{-4}$; os expoentes de penalidade foram $p_s = p_s^x = p_s^y = 1,10$ e $p_p = p_p^x = p_p^y = 1,05$; e o expoente p_v foi de 3,30.

A Figura 4.63 mostra o resultado obtido.

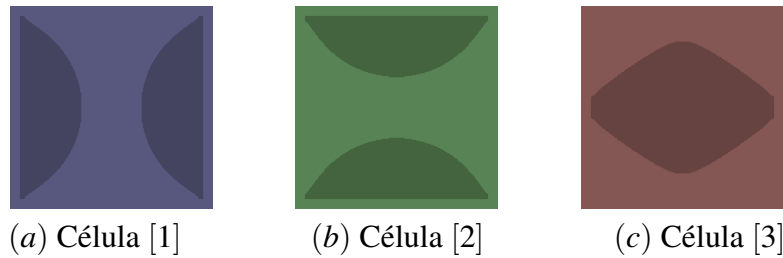


Figura 4.63 – Células Finais da Otimização de Estruturas Reativas - Quinto Caso

Apesar de suas especificidades, esse resultado é consistente com os obtidos nos casos anteriores: a camada superior deve expandir e a inferior retrair para que a estrutura deforme-se como o desejado. Para isso, o método atribuiu à camada superior uma célula de expansão lateral e, à inferior, atribuiu uma célula de expansão vertical. Na camada central, definiu-se um segundo tipo de célula de expansão vertical.

Na otimização multiescala, partiu-se da solução do caso anterior, com a macrotopologia dada na Figura 4.62 e as microtopologias dadas na Figura 4.63. As propriedades foram as mesmas e, após cada iteração na macroescala, realizaram-se 2 iterações consecutivas na microescala.

A Figura 4.64 apresenta as microtopologias otimizadas.

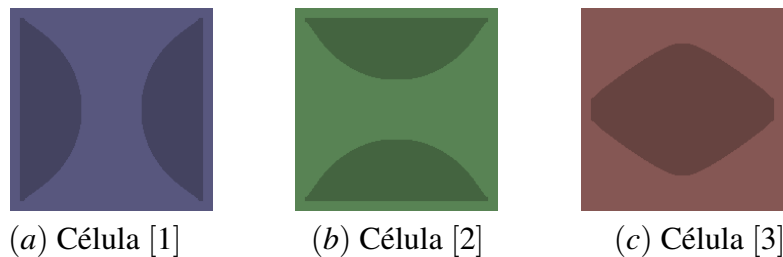


Figura 4.64 – Células Finais da Otimização de Estruturas Reativas - Sexto Caso

A Figura 4.65 apresenta o resultado para a macrotopologia.

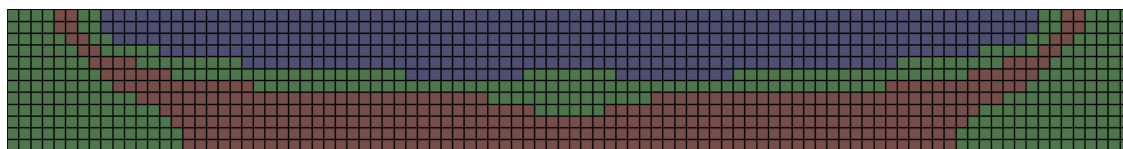


Figura 4.65 – Macrotopologia Final da Otimização de Estruturas Reativas - Sexto Caso

Não houve mudanças substanciais nas microtopologias, contudo, a macrotopologia assumiu uma configuração peculiar. As extremidades da estrutura ficaram compostas pela célula 2 e, na parte central, as camadas de células 1 e 3 se tornaram mais espessas. Como esperado, as células de expansão lateral mantiveram-se na parte superior e as de expansão vertical na inferior.

Em todos os casos, o processo de otimização melhorou a atuação da estrutura. Para cada um deles, a Tabela 4.12 apresenta os valores de trabalho útil nas topologias inicial e final.

Tabela 4.12 – Valores de h_o nas Estruturas Reativas

Caso	h_o Inicial [J]	h_o Final [J]
Primeiro	$7,50 \cdot 10^{-3}$	$1,49 \cdot 10^1$
Segundo	$6,03 \cdot 10^0$	$6,78 \cdot 10^0$
Terceiro	$0,00 \cdot 10^0$	$1,36 \cdot 10^1$
Quarto	$1,36 \cdot 10^1$	$1,64 \cdot 10^1$
Quinto	$4,84 \cdot 10^{-6}$	$8,87 \cdot 10^0$
Sexto	$8,87 \cdot 10^0$	$1,08 \cdot 10^1$

No primeiro caso, a topologia inicial foi definida arbitrariamente e corresponde a um atuador pouco eficaz, diferentemente do segundo caso, em que se parte de uma solução intuitiva. Isso explica a diferença entre os ganhos da otimização desses casos. De toda forma, é relevante a melhoria de 12 % obtida no segundo caso, visto que já se parte de um *design* funcional.

No terceiro caso, obteve-se uma solução viável a partir de uma topologia ineficaz (de trabalho nulo). Em seguida, no quarto caso, essa solução foi aprimorada, com um ganho de 21 %. Os quinto e sexto casos possuem resultados semelhantes aos do terceiro e quarto: obteve-se uma estrutura funcional com a otimização microescala e, em seguida, aprimorou-se o resultado com a otimização multiescala, com um ganho de 22 % nesta.

Na Figura 4.66, tem-se, para o sexto caso, a curva de evolução do trabalho útil durante o processo de otimização multiescala. A macrotopologia foi apresentada para algumas das iterações.

Nota-se que durante as iterações que atualizaram as microtopologias, a função-objetivo quase não sofreu alterações. Essa característica é esperada na estratégia utilizada. Nessa abordagem, otimiza-se primeiro as microtopologias (quinto caso), em seguida inicia-se a oti-

mização multiescala; após cada alteração na macrotopologia, realizam-se algumas iterações consecutivas na microescala (2 nesse caso); isso é feito no intuito de obter uma configuração estável para as microtopologias antes de alterar novamente a macrotopologia, melhorando a estabilidade e convergência do método.

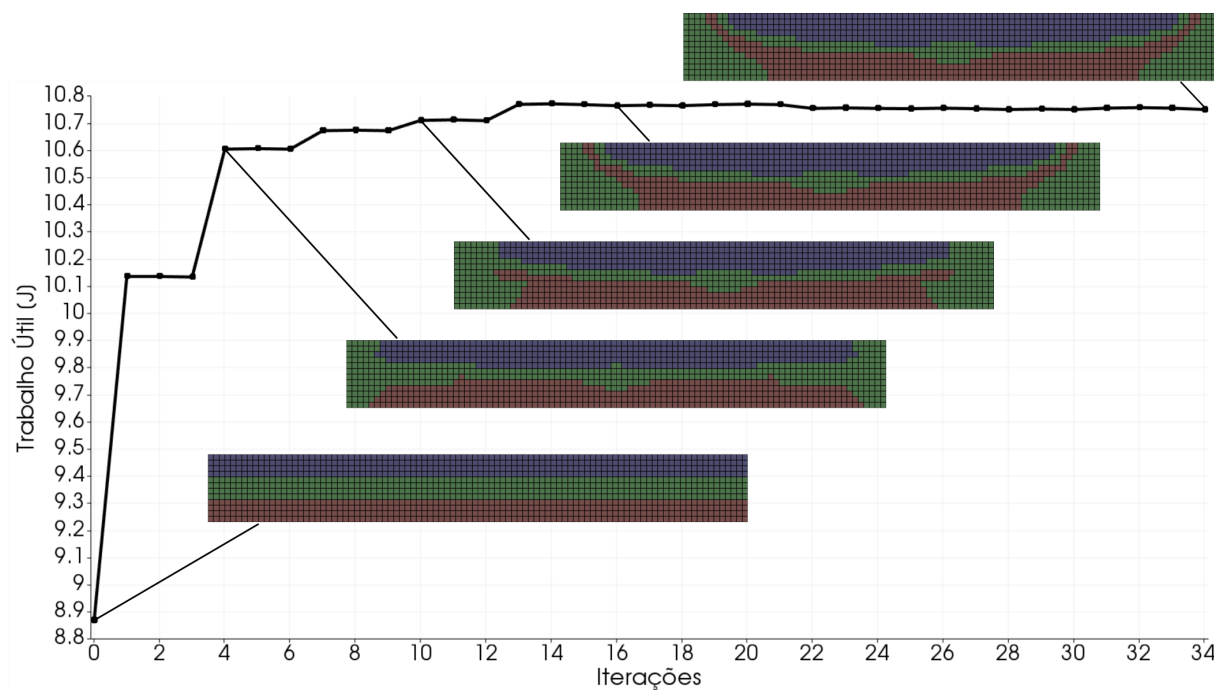


Figura 4.66 – Evolução da Função-Objetivo na Estrutura Reativa - Sexto Caso

Uma vez obtida a estrutura otimizada, remove-se a mola objetivo e considera-se uma carga pontual f_a aplicada verticalmente no ponto de interesse. Supõe-se aqui um sistema de controle que, para uma carga qualquer, obtém a pressão p_f que mantém o ponto de interesse fixo, com deslocamento nulo.

A Tabela 4.13 apresenta alguns valores de correlação entre f_a e p_f para o sexto caso. Para os mesmos valores de pressão, avaliou-se a carga correspondente para a topologia inicial e final. Calculou-se então o ganho dessa carga devido à otimização.

Tabela 4.13 – Correlação de Cargas na Estrutura Reativa - Sexto Caso

Pressão p_f [Pa]		$0,00.10^0$	$5,00.10^3$	$1,00.10^4$	$2,50.10^4$	$5,00.10^4$	$1,00.10^5$	$1,50.10^5$
Carga f_a (inicial) [N/m]		$0,00.10^0$	$5,25.10^3$	$1,01.10^4$	$2,26.10^4$	$3,83.10^4$	$5,88.10^4$	$7,22.10^4$
Carga f_a (final) [N/m]		$0,00.10^0$	$5,62.10^3$	$1,08.10^4$	$2,41.10^4$	$4,05.10^4$	$6,15.10^4$	$7,50.10^4$
Ganho		—	7%	7%	7%	6%	5%	4%

Os ganhos da carga suportada para uma mesma pressão (entre 4 e 7%) não corresponderam ao ganho da função-objetivo na otimização realizada (22%), isso ocorre pois esses valores não são relacionados de forma direta. O processo de otimização realizado consiste apenas numa abordagem intuitiva para aprimorar a estrutura reativa em questão.

Na Figura 4.67, têm-se esses pontos ligados por *splines* cúbicas.

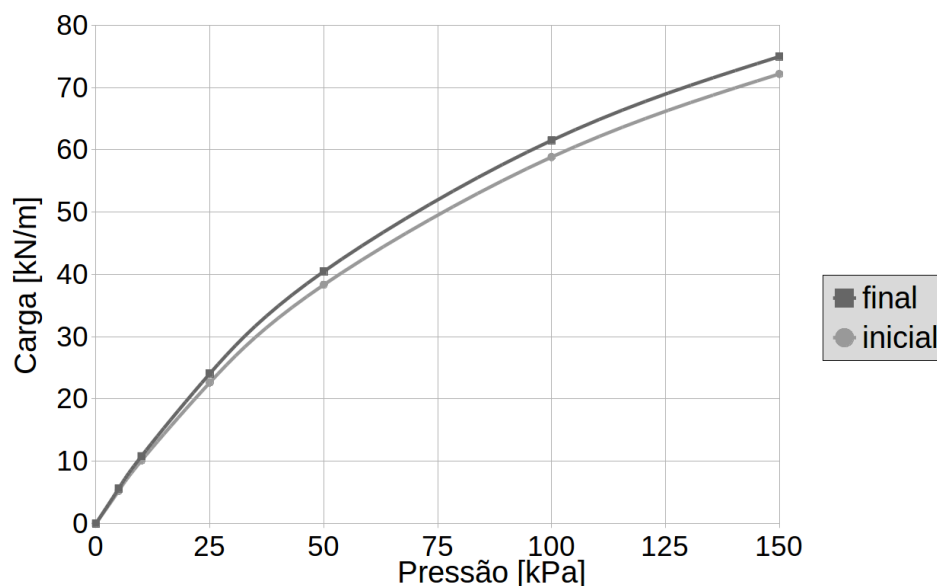


Figura 4.67 – Curva de Correlação de Cargas na Estrutura Reativa - Sexto Caso

A Figura 4.68 apresenta a topologia inicial deformada, suportando uma carga f_a de 72 kN/m pela aplicação de uma pressão $p_f = 150\text{ kPa}$.

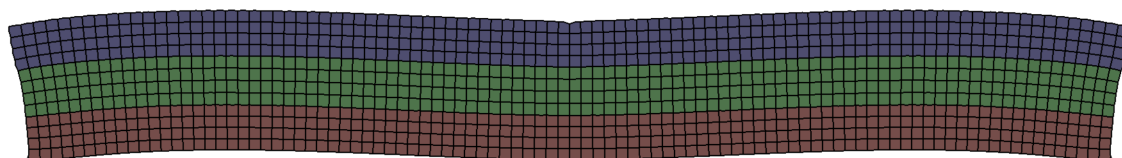


Figura 4.68 – Estrutura Reativa Deformada - Sexto Caso (Inicial)

A Figura 4.69 apresenta a topologia final deformada, suportando uma carga f_a de 75 kN/m pela aplicação de uma pressão $p_f = 150\text{ kPa}$.

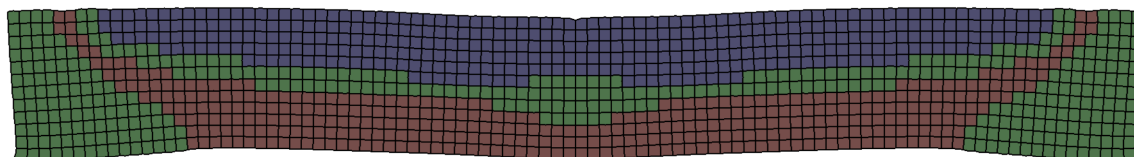


Figura 4.69 – Estrutura Reativa Deformada - Sexto Caso (Final)

O tempo de processamento da otimização foi avaliado para o sexto caso. Aqui, o carregamento de pressão foi aplicado em 6 passos de carga.

Na máquina utilizada, o programa levou cerca de 685 segundos para realizar essa otimização, usando 4 núcleos nos trechos paralelizados. O tempo utilizado no cálculo e realização do *assembly* de matrizes tangentes e vetores resíduos da macroestrutura foi de 363 segundos (53 % do tempo total). Nas etapas de análise, a resolução dos sistemas lineares do método de

Newton-Raphson levou 103 segundos (15 % do tempo), foram cerca de 1840 sistemas (40 por iteração do BESO microescala e 80 por iteração do BESO macroescala) de dimensão 3672. O tempo usado nas análises de sensibilidade referentes à macrotopologia foi de 6 segundos (1 % do tempo), nessa etapa, resolvem-se 2 sistemas lineares por iteração do BESO macroescala, foram 24 ao todo, também de dimensão 3672. O tempo usado nas análises de sensibilidade referentes às microtopologias foi de 62 segundos (9 % do tempo), nessa etapa, resolvem-se 1 sistema linear de dimensão 3672 (referente à macroestrutura), foram 22 ao todo, e 12 sistemas lineares de dimensão 20200 (referentes às microestruturas), foram 264 ao todo. Após cada iteração do BESO microescala, o módulo de Young e o vetor de cargas de cada célula deve ser atualizado, nessa etapa, resolvem-se 3 sistemas não lineares na microescala, de dimensão 20200, somando o tempo dos *assemblies* e das resoluções de sistemas lineares do método de Newton-Raphson, o tempo gasto foi de 151 segundos (22 % do tempo). O restante das operações não teve impacto relevante no tempo de execução.

Esse mesmo programa levou 1635 segundos para ser executado em um único núcleo. Novamente, o *speedup* da paralelização utilizada foi de 2,4.

4.2.3 Constritores Radiais

A segunda categoria abordada para os mecanismos celulares foi a concepção de constritores radiais, que são atuadores que devem conectar um corpo a um eixo. O mecanismo está fixo ao corpo e prende-se ao eixo pressionando-se contra ele.

Considerou-se a estrutura apresentada na Figura 4.70. A aresta do domínio quadrado é de 200cm e o raio da cavidade do eixo é de 50cm. Levando em conta os elementos vazios do círculo interno, a malha da macroestrutura possui 10000 elementos (2500 no problema reduzido).

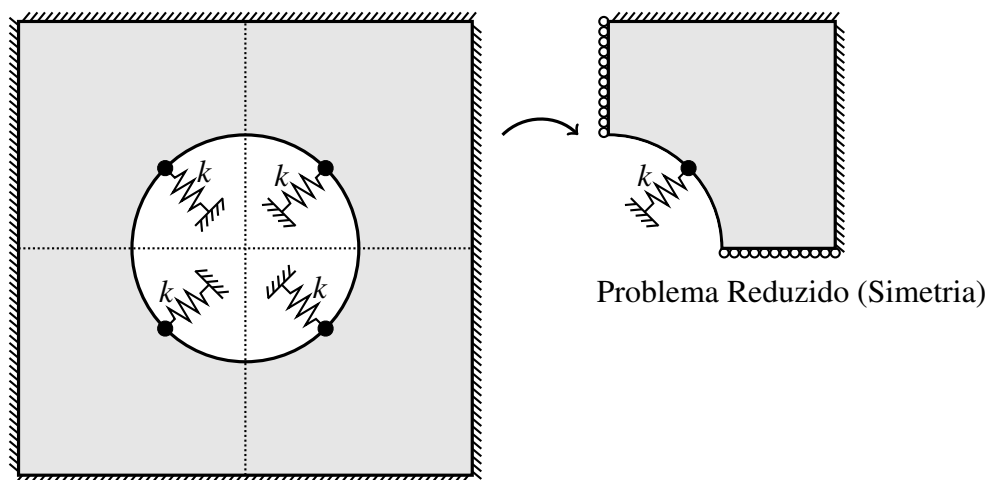


Figura 4.70 – Constritor Radial de Pressão Diagonal

Definiram-se 4 pontos de pressão nesse mecanismo, angulados de 45° em relação

à horizontal, nos quais se posicionaram as molas-objetivo. Considera-se que o corpo ao qual o constritor está fixado é muito mais rígido que ele, assim, ele é representado por uma condição de engaste no contorno externo do mecanismo.

O primeiro caso considerado foi uma otimização macroescala, utilizando somente duas células: completamente sólida; e de cavidade circular (Figura 4.51d). Cada uma compõe metade do domínio de trabalho.

A constante de mola foi $k = 1 \text{ kN/m}^2$; a pressão aplicada foi $p_c = 1 \text{ MPa}$; os parâmetros que limitam as alterações de topologia foram $AR^p = AR^q = 2\%$; os parâmetros de convergência foram $n_c = 5$ e $\tau = 0,0001\%$; o raio do filtro suavizador foi $\hat{r}_{\max} = 5 \text{ cm}$; os valores mínimos de densidade foram $x_{\min} = y_{\min} = z_{\min} = 5 \cdot 10^{-4}$; os expoentes de penalidade foram $p_s = p_s^x = p_s^y = 1,10$ e $p_p = p_p^x = p_p^y = 0,90$; e o parâmetro do modelo representativo p_v foi de 1,10.

Estabeleceram-se as cores roxa e vermelha para simbolizar cada uma das células, de acordo com a Figura 4.71. As células vazias, que não fazem parte do domínio de projeto foram representadas em branco.

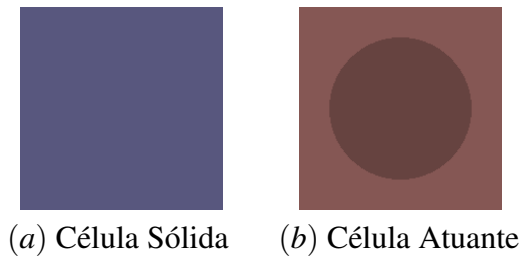


Figura 4.71 – Células da Otimização de Constritores Radiais - Primeiro Caso

A Figura 4.72 apresenta a macrotopologia inicial (a) utilizada e a obtida pelo programa (b) após o processo de otimização macroescala.

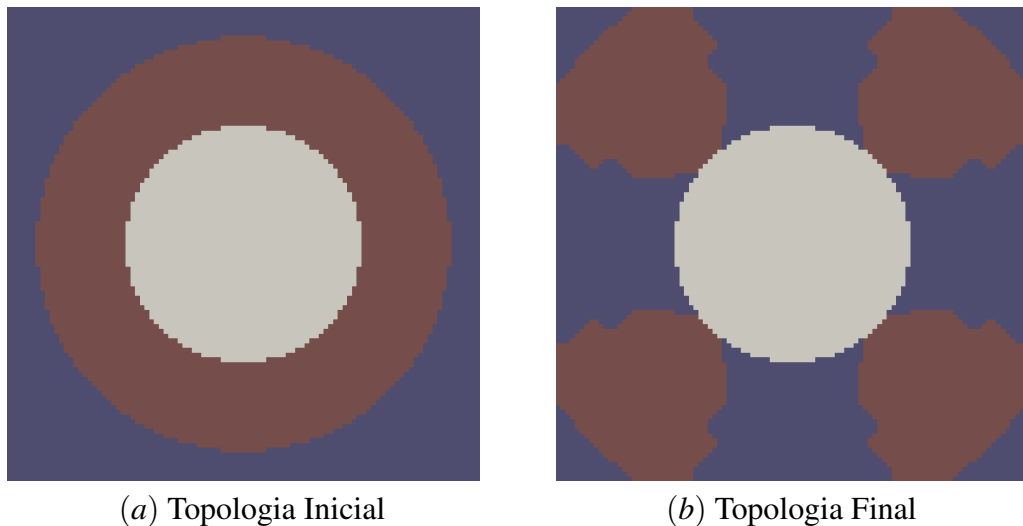


Figura 4.72 – Macrotopologias da Otimização de Constritores Radiais - Primeiro Caso

O método busca uma forma para o domínio de células atuantes que direcione corretamente o carregamento de pressão e reduza a resistência da estrutura ao movimento desejado. Na solução, as células atuantes foram concentradas em torno dos pontos de pressão, conectando-os ao engaste.

Em seguida, partindo do resultado do primeiro caso, realizou-se uma otimização multiescala, na qual otimiza-se a célula atuante em conjunto com a macrotopologia. Alguns parâmetros foram alterados. Utilizou-se uma pressão $p_c = 500\text{ kPa}$, expoentes $p_p = p_p^x = p_p^y = 0,50$ e parâmetros de convergência $n_c = 6$ e $\tau = 0,001\%$. O raio do filtro suavizador na microescala foi $\check{r}_{\max} = 0,05\text{ cm}$. Após cada iteração na macroescala, realizou-se 1 iteração na microescala.

A Figura 4.73 apresenta a microtopologia otimizada.

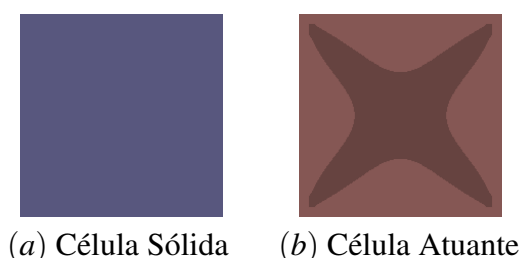


Figura 4.73 – Células Finais da Otimização de Constritores Radiais - Segundo Caso

A Figura 4.74 apresenta o resultado para a macrotopologia.

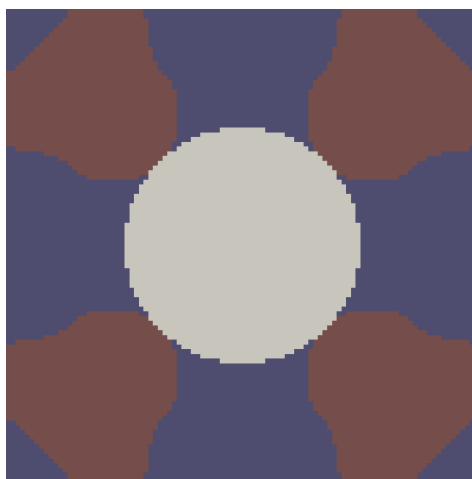


Figura 4.74 – Macrotopologia Final da Otimização de Constritores Radiais - Segundo Caso

A microtopologia melhorou sua capacidade de expansão, formando uma cavidade em "X". As pequenas assimetrias observadas na solução são naturais ao método – sem uma imposição ativa de simetria, ela é perdida durante a evolução da topologia. Por sua vez, a macrotopologia manteve as mesmas características, com pequenas alterações no contorno do domínio de células atuantes, que se tornou mais suave.

Em seguida, realizou-se uma otimização macroescala. Utilizaram-se a célula de 4 cavidades (Figura 4.51b) e as de 2 cavidades (Figura 4.51e e Figura 4.51f). Na macrotopologia final, cada célula compõe um terço do domínio de projeto.

O padrão de cores foi o mesmo, ilustrado na Figura 4.75.



Figura 4.75 – Células da Otimização de Constritores Radiais - Terceiro Caso

Nesse caso, a pressão aplicada foi $p_c = 100kPa$ e o expoente p_v foi de 3,30. Os parâmetros que definem como a evolução das proporções volumétricas ocorrem foram $ER^p = ER^q = 2\%$. O restante dos parâmetros foram mantidos.

A Figura 4.76 apresenta a macrotopologia inicial (a) utilizada e a obtida pelo programa (b) após o processo de otimização macroescala.

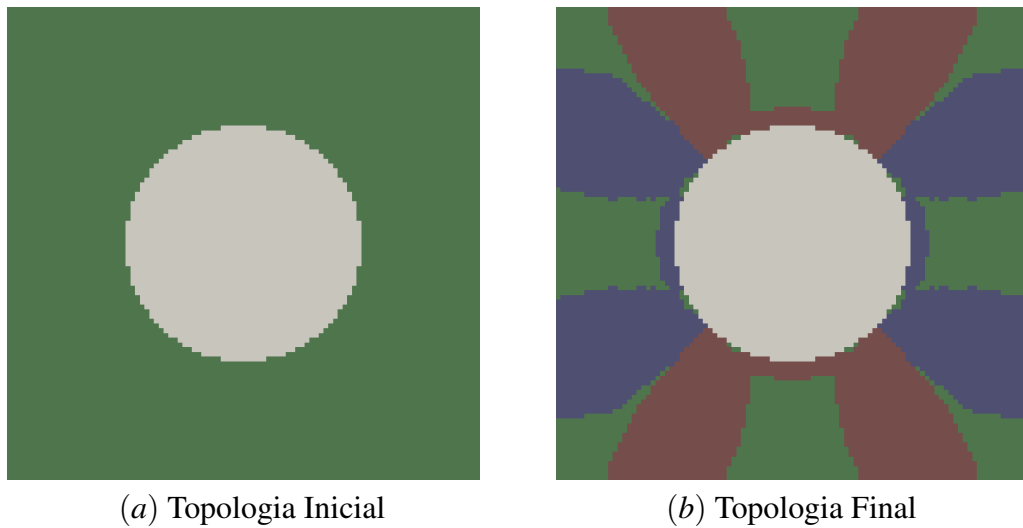


Figura 4.76 – Macrotopologias da Otimização de Constritores Radiais - Terceiro Caso

Nota-se um padrão espelhado entre as células de expansão lateral e as células de expansão vertical. Seus domínios se encontram nos pontos de pressão, nos quais, pela combinação de efeitos, realiza-se o movimento diagonal desejado. As células do tipo [2] preenchem o restante do domínio, buscando manter a simetria da solução.

Consideraram-se então pontos de pressão diferentes, dados na Figura 4.77. Os três primeiros casos foram repetidos com essa nova configuração de molas.

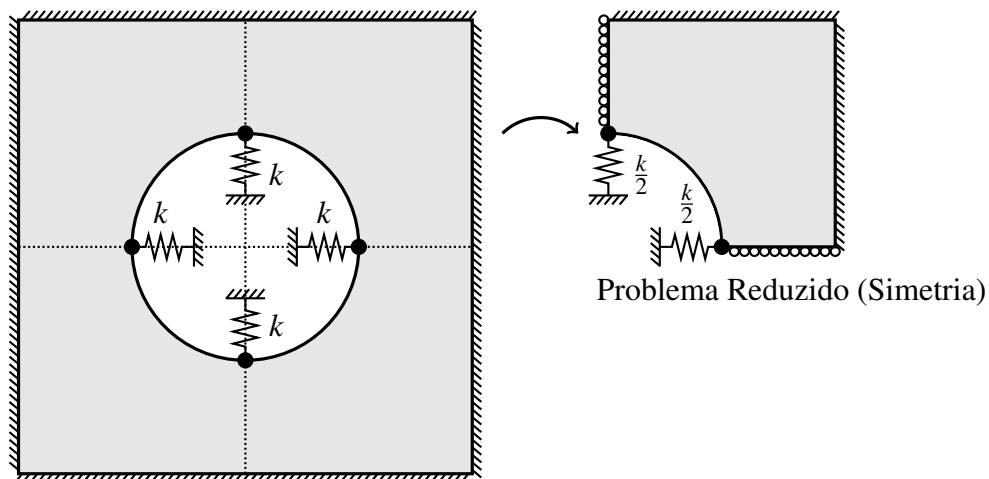


Figura 4.77 – Constritor Radial de Pressão Horizontal-Vertical

Utilizando as células da Figura 4.71, otimizou-se a macrotopologia do mecanismo. Os parâmetros foram os mesmos do primeiro caso.

A Figura 4.78 apresenta o resultado obtido.

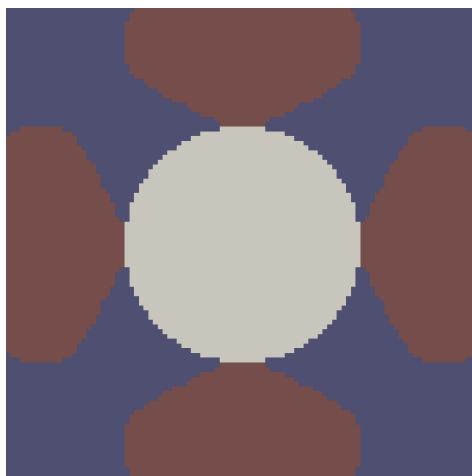


Figura 4.78 – Macrotopologia Final da Otimização de Constritores Radiais - Quarto Caso

Obteve-se uma resposta análoga à do primeiro caso: as células atuantes se concentraram em torno dos pontos de pressão, conectando-os ao engaste e orientando as cargas apropriadamente.

Em seguida, partindo dessa solução, realizou-se uma otimização multiescala. As propriedades foram as mesmas do segundo caso.

A Figura 4.79 e a Figura 4.80 apresentam os resultados otimizados para a microtopologia e para a macrotopologia.

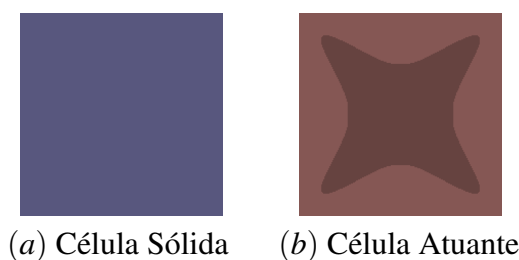


Figura 4.79 – Células Finais da Otimização de Constritores Radiais - Quinto Caso

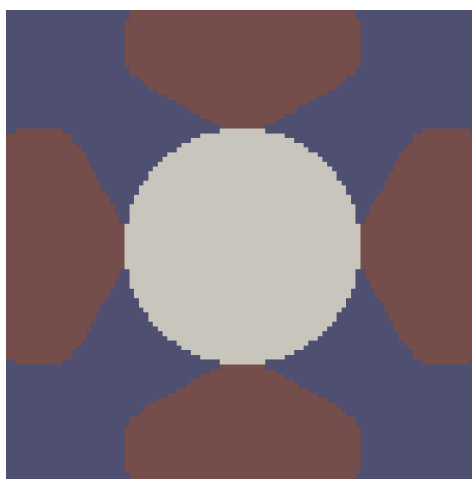


Figura 4.80 – Macrotopologia Final da Otimização de Constritores Radiais - Quinto Caso

A macrotopologia não teve alterações substanciais e, assim como no segundo caso, a microtopologia ampliou sua expansão formando uma cavidade em "X".

Por fim, utilizando as células apresentadas na Figura 4.75, fez-se uma otimização macroescala, com os mesmos parâmetros usados no terceiro caso.

A Figura 4.81 apresenta a macrotopologia inicial (a) utilizada e a obtida pelo programa (b) após o processo de otimização.

Aqui também nota-se um padrão espelhado entre as células de expansão lateral e as células de expansão vertical. Estas se concentraram nos pontos de pressão verticais e aquelas nos pontos de pressão laterais.

A Tabela 4.14 apresenta os valores de trabalho útil das topologias inicial e final para cada um dos seis casos avaliados.

Todos os ganhos observados foram notáveis, acima de 100%. O ganho extraordinário de mais de 30000% no segundo caso ocorreu devido à aproximação da microtopologia a uma condição de singularidade. Nela, a célula manteve sua conectividade somente pela parede celular mínima imposta, o que aumentou de forma intensa a carga equivalente no elemento representativo.

Na Figura 4.82, tem-se, para o sexto caso, a curva de evolução do trabalho útil durante o processo de otimização, com a macrotopologia de algumas iterações.

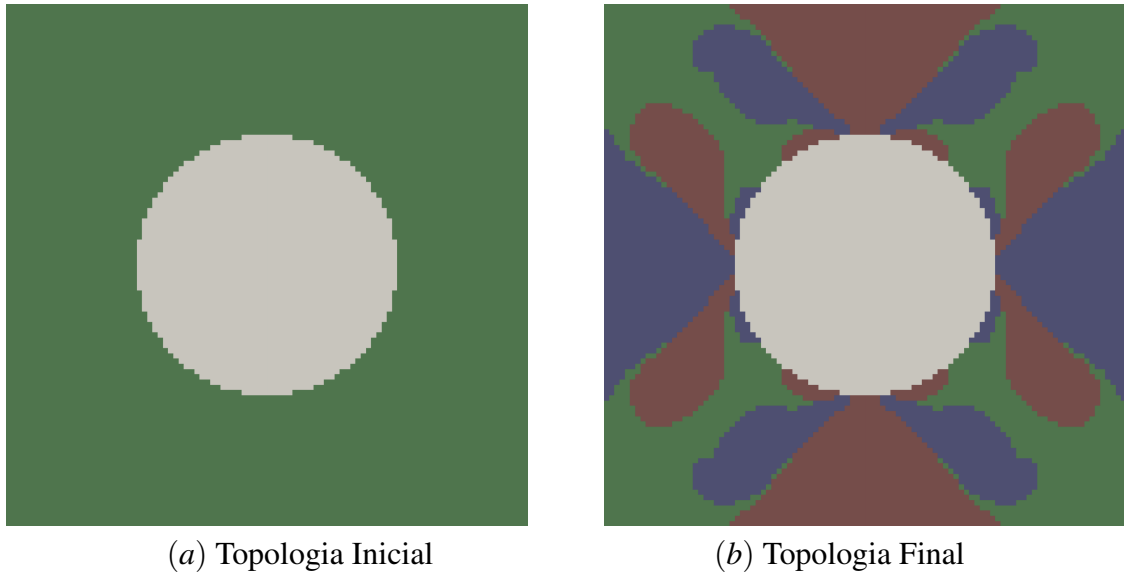


Figura 4.81 – Macrotopologias da Otimização de Constritores Radiais - Sexto Caso

Tabela 4.14 – Valores de h_o nos Constritores Radiais

Caso	h_o Inicial [J]	h_o Final [J]
Primeiro	$1,67 \cdot 10^{-3}$	$4,79 \cdot 10^{-3}$
Segundo	$1,07 \cdot 10^{-3}$	$3,42 \cdot 10^{-1}$
Terceiro	$8,00 \cdot 10^{-2}$	$5,30 \cdot 10^{-1}$
Quarto	$4,61 \cdot 10^{-3}$	$9,77 \cdot 10^{-3}$
Quinto	$2,19 \cdot 10^{-3}$	$8,86 \cdot 10^{-2}$
Sexto	$1,39 \cdot 10^{-1}$	$7,80 \cdot 10^{-1}$

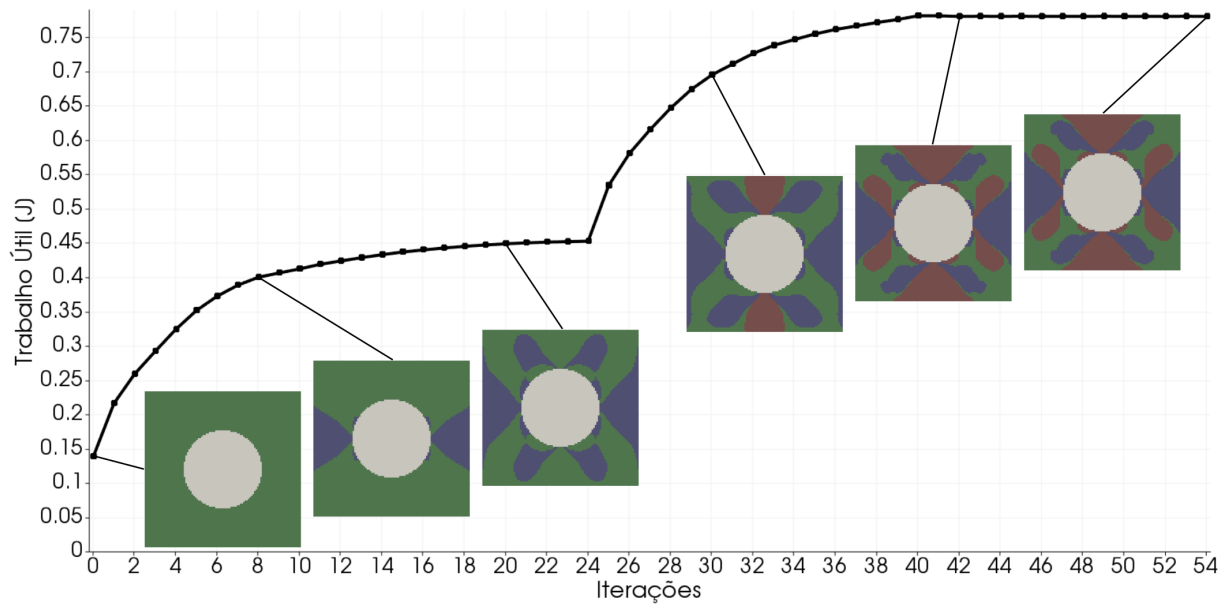


Figura 4.82 – Evolução da Função-Objetivo no Constritor Radial - Sexto Caso

A topologia inicia com 100% de seu domínio de projeto composto por células do tipo [2]; o método segue adicionando células do tipo [1] até a proporção entre elas atingir o valor alvo, de 50%, que ocorre na iteração 25; a partir daí, mantendo a proporção entre as células dos tipos [1] e [2], adicionam-se células do tipo [3] até que todas elas componham um terço do domínio de projeto, que ocorre na iteração 42; as últimas 12 iterações são feitas com proporções volumétricas constantes.

Nota-se que, aos poucos, a inclusão de mais células do tipo [1] na topologia deixa de ser relevante e a função-objetivo começa a se estabilizar; o "bico" que aparece na curva marca o momento em que se começam a adicionar células do tipo [3] à topologia; quando as frações volumétricas alvo são atingidas a função-objetivo já está praticamente estável novamente. Observando as topologias, evidencia-se que as alterações que mais contribuem para a otimização são as inclusões das áreas triangulares de células que expandem na direção desejada em cada ponto de pressão.

A Figura 4.83 e a Figura 4.84 apresentam, para as topologias inicial e final, o mecanismo em repouso (a), formado pela carga usada na otimização (b) e deformado por uma carga cinco vezes maior (c).

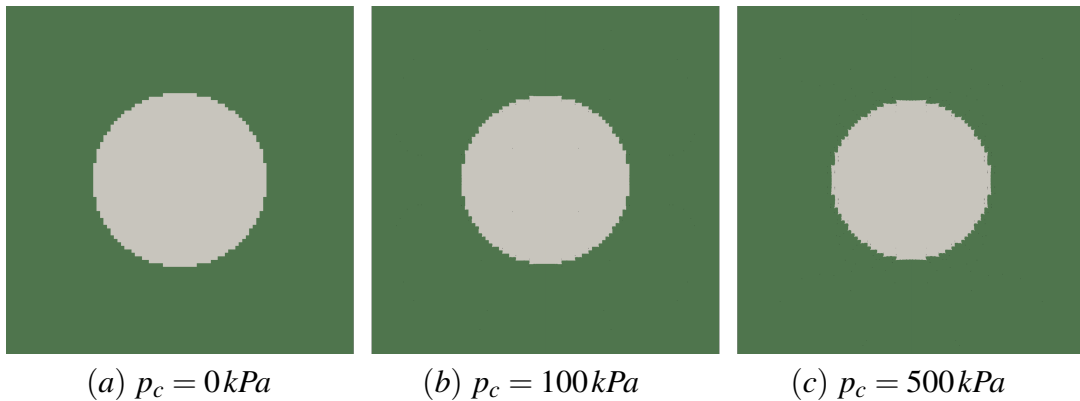


Figura 4.83 – Célula de Expansão Vertical e Horizontal Deformada - Inicial

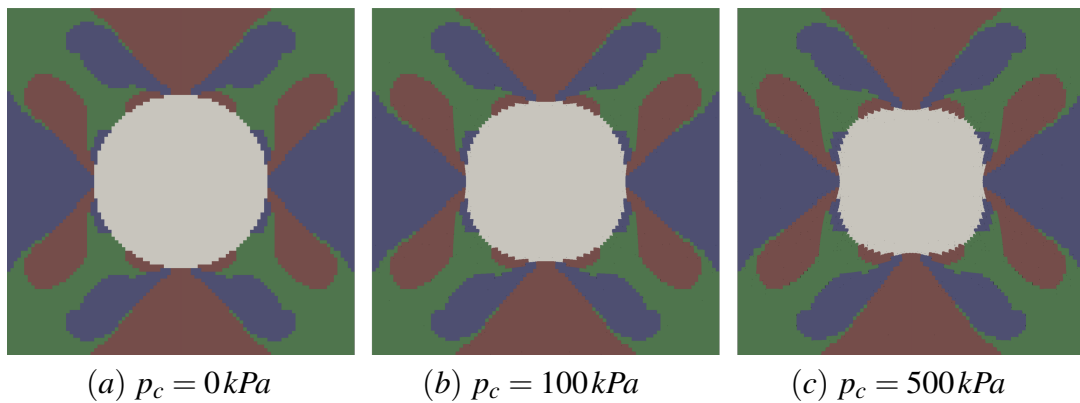


Figura 4.84 – Célula de Expansão Vertical e Horizontal Deformada - Final

A topologia inicial, composta somente pelas células do tipo [2], é muito ineficaz. A constrição ocorre no perímetro circular todo, sem privilegiar o movimento nos pontos de pressão. Apesar disso, a interferência na cavidade foi relevante: o deslocamento máximo para $p_c = 100\text{kPa}$ foi de 19mm e para $p_c = 500\text{kPa}$ foi de 47mm .

Na topologia final, a interferência é focada nos pontos de pressão, melhorando a eficácia do mecanismo: o deslocamento máximo para $p_c = 100\text{kPa}$ foi de 41mm e para $p_c = 500\text{kPa}$ foi de 88mm .

O programa levou cerca de 478 segundos para realizar a otimização do sexto caso, usando 4 núcleos. O tempo utilizado no cálculo e realização do *assembly* das matrizes tangentes e vetores resíduos para as etapas de análise foi de 301 segundos (63 % do tempo total). A resolução dos sistemas lineares do método de Newton-Raphson levou 81 segundos (17 % do tempo), foram cerca de 432 sistemas (8 por iteração BESO) de dimensão 14800. O tempo usado nas análises de sensibilidade foi de 86 segundos (18 % do tempo), nessa etapa, resolvem-se 2 sistemas lineares por iteração do BESO, foram 108 ao todo, também de dimensão 14800. No início da otimização macroescala avalia-se a deformação de cada célula isolada, para obter as propriedades dos elementos representativos, nessa etapa resolveram-se 3 sistemas não-lineares de dimensão 20200, o tempo gasto foi de 10 segundos (2 % do tempo). O restante das operações não teve impacto relevante no tempo de execução.

Esse mesmo programa levou 1435 segundos para ser executado em um único núcleo. Aqui, o *speedup* da paralelização utilizada foi de 3,0.

4.2.4 Atuadores Articulados

A última categoria abordada para os mecanismos celulares foi a concepção de atuadores articulados, que são atuadores que se doblam em torno de uma articulação para realizar determinada função.

Com base na motivação deste trabalho, os mecanismos de plantas násticas, considerou-se a estrutura dada na Figura 4.85.

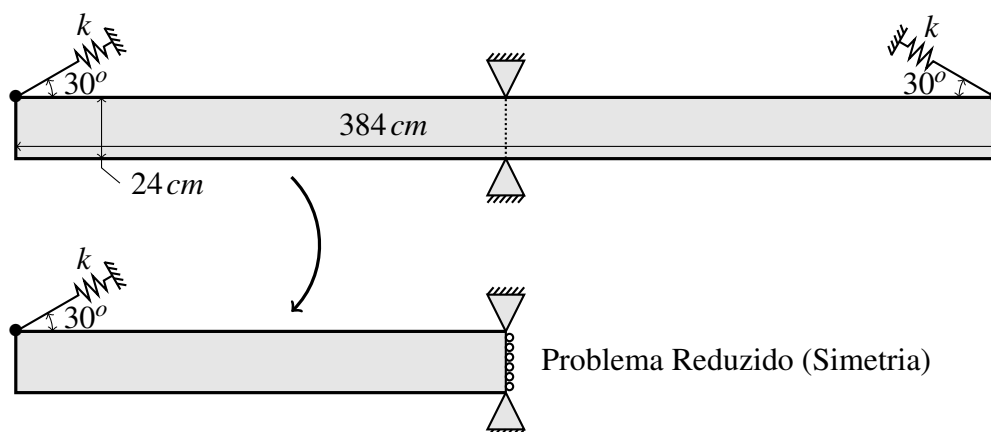


Figura 4.85 – Atuador Pinça

As molas-objeto foram colocadas a uma angulação de 30° para favorecer o movimento de fechamento do mecanismo. A malha da macroestrutura possui 2304 elementos (1152 no problema reduzido).

O primeiro caso foi uma otimização macroescala, utilizando uma célula completamente sólida, uma célula completamente vazia e a célula de cavidade em "X" (Figura 4.51c), dadas na Figura 4.86.

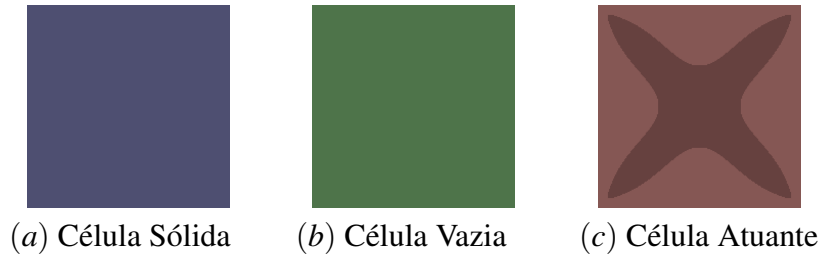


Figura 4.86 – Células da Otimização de Atuadores Articulados - Primeiro Caso

A constante de mola utilizada foi $k = 1 \text{ kN/m}^2$; a pressão aplicada foi $p_c = 100 \text{ kPa}$; os parâmetros que limitam as alterações de topologia foram $AR^p = AR^q = 2\%$ e $ER^p = ER^q = 2\%$; os parâmetros de convergência foram $n_c = 4$ e $\tau = 0,01\%$; o raio do filtro suavizador foi $\hat{r}_{\max} = 6 \text{ cm}$; os valores mínimos de densidade foram $x_{\min} = y_{\min} = z_{\min} = 5 \cdot 10^{-4}$; os expoentes de penalidade foram $p_s = p_s^x = p_s^y = 1,10$ e $p_p = p_p^x = p_p^y = 2,20$; e o expoente do modelo representativo foi $p_v = 1,10$.

A composição da macrotopologia inicial é de dois terços de células sólidas e um terço de células atuantes. A frações volumétricas alvo são de 25 % de células sólidas, 25 % de células vazias e 50 % de células atuantes.

A Figura 4.87 apresenta a macrotopologia inicial utilizada (a) e a obtida pelo programa (b) após o processo de otimização macroescala.

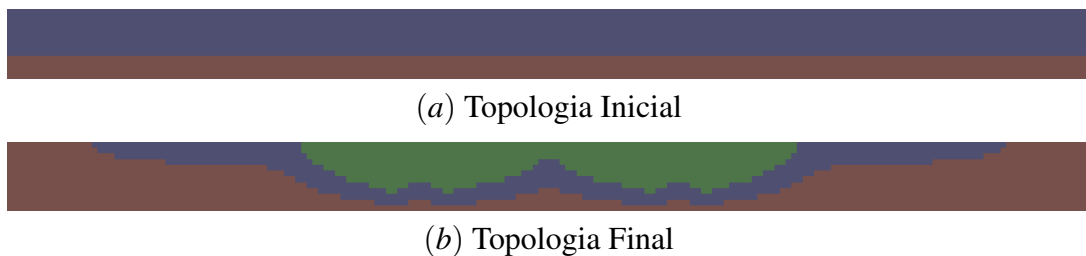


Figura 4.87 – Macrotopologias da Otimização de Atuadores Articulados - Primeiro Caso

Na topologia otimizada, a camada superior de sólido foi mantida, agora concentrada na parte central da estrutura. O método buscou maximizar a rotação nos arredores da articulação reduzindo a espessura do mecanismo nessa região.

Em seguida, realizou-se uma otimização microescala. As propriedades alteradas em relação ao primeiro caso foram: a pressão $p_c = 50 \text{ kPa}$; o parâmetro de convergência $n_c = 6$; e

os expoentes de penalidade $p_p = p_p^x = p_p^y = 0,90$. O raio do filtro suavizador foi $\check{r}_{\max} = 0,05 \text{ cm}$; e o parâmetro que limita as alterações da topologia $AR = 5 \%$.

A Figura 4.88 apresenta a macrotopologia utilizada. Cada célula compõe um terço da estrutura.



Figura 4.88 – Macrotopologia da Otimização de Atuadores Articulados - Segundo Caso

A primeira célula é sólida e ambas as células atuantes iniciam com cavidades circulares (Figura 4.51d), conforme apresentado na Figura 4.89.

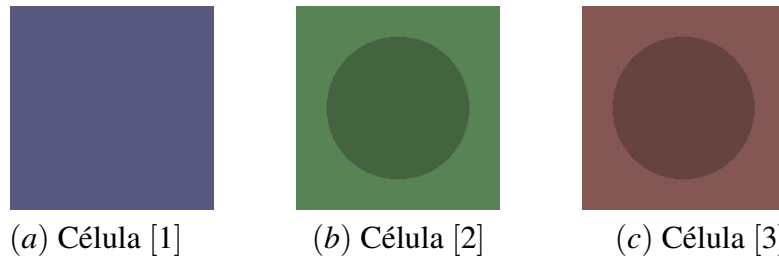


Figura 4.89 – Células Iniciais da Otimização de Atuadores Articulados - Segundo Caso

A Figura 4.90 apresenta o resultado após o processo de otimização microescala.

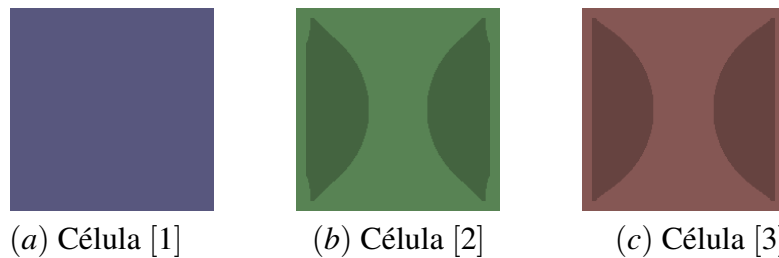


Figura 4.90 – Células Otimizadas do Atuador Articulado - Segundo Caso

As microtopologias obtidas são praticamente as mesmas. O método buscou maximizar a expansão lateral das células que compõem as camadas inferiores do mecanismo.

No último caso considerado, realizou-se uma otimização multiescala, partindo do resultado do segundo caso. As propriedades não foram alteradas e, após cada iteração na macroescala, realizou-se 1 iteração na microescala. As razões volumétricas foram mantidas.

A Figura 4.91 apresenta as microtopologias após a otimização multiescala. E a Figura 4.92 apresenta o resultado para a macrotopologia.

Não houve alterações substanciais nas microtopologias. Como as microtopologias das células ativas são muito similares, pode-se entender as partes verde e vermelha como um único domínio, portanto, é pouco relevante a troca de lugar das camadas de células ativas. Com

isso, tem-se que a melhoria na função-objetivo se deu principalmente pela redistribuição das células sólidas, que foram concentradas na parte central do mecanismo.

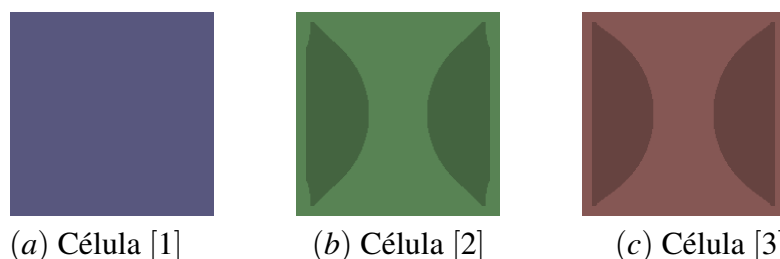


Figura 4.91 – Células Otimizadas do Atuador Articulado - Terceiro Caso



Figura 4.92 – Macrotopologia Otimizada do Atuador Articulado - Terceiro Caso

A Tabela 4.15 apresenta os valores de trabalho útil das topologias inicial e final para cada um dos três casos avaliados.

Tabela 4.15 – Valores de h_o nos Atuadores Articulados

Caso	h_o Inicial [J]	h_o Final [J]
Primeiro	$6,83 \cdot 10^0$	$3,02 \cdot 10^1$
Segundo	$5,53 \cdot 10^{-3}$	$5,70 \cdot 10^1$
Terceiro	$5,70 \cdot 10^1$	$8,89 \cdot 10^1$

Os resultados foram positivos. O ganho no primeiro caso foi de 342% e no último caso de 56%. No segundo tem-se novamente um ganho extraordinário, ele ocorre devido à ineficácia da célula de cavidade circular e à condição quase singular das células otimizadas, que possuem uma expansão muito elevada e, com isso, produzem uma carga equivalente intensa no elemento representativo.

As molas foram removidas e o comportamento das topologias foi avaliado. No primeiro caso, a pressão para o fechamento foi de $p_c = 1170 \text{ kPa}$. A Figura 4.93 mostra a topologia inicial deformada sob essa pressão e a Figura 4.94 mostra a topologia final.

Para a topologia inicial, o maior deslocamento nodal foi de 114 cm. Após a otimização, o deslocamento máximo aumentou de 113%, para 243 cm.

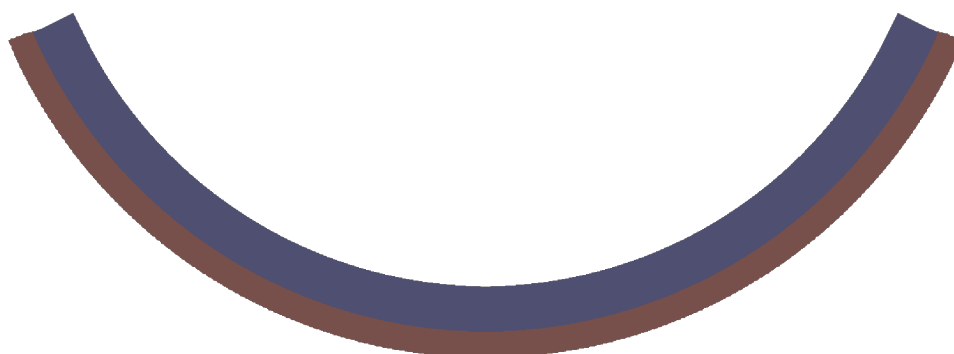


Figura 4.93 – Atuador Articulado Deformado - Primeiro Caso (Inicial)

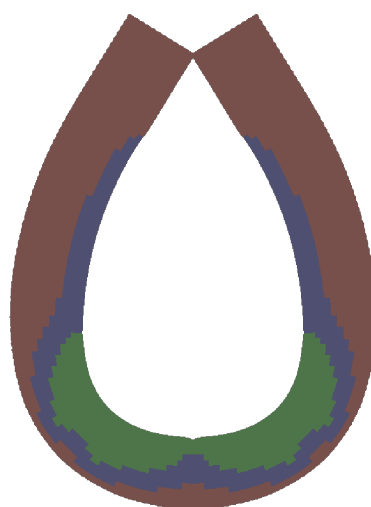


Figura 4.94 – Atuador Articulado Deformado - Primeiro Caso (Final)

No terceiro caso, a pressão para o fechamento foi de $p_c = 1260, kPa$. A Figura 4.95 mostra a topologia inicial deformada sob essa pressão e a Figura 4.96 mostra a topologia final.

Para a topologia inicial, o maior deslocamento nodal foi de $240 cm$. Após a otimização, o deslocamento máximo aumentou de 4% , para $250 cm$.

A diferença entre os ganhos desses casos ocorreu por alguns motivos. No primeiro caso, as proporções entre células são alteradas durante a otimização, a substituição de células sólidas por células vazias e atuantes provoca uma melhoria mais intensa no mecanismo do que o simples rearranjo de células ativas, realizado no terceiro caso. Além disso, o terceiro caso já parte de um *design* eficaz, que passou por um processo de otimização microescala.

Notam-se comportamentos distintos em cada caso. Devido à presença de elementos vazios, o atuador do primeiro caso consegue concentrar seu movimento na região próxima à articulação, mantendo uma deformação reduzida nas extremidades, isso faz com que o mecanismo assuma um formato de gota quando aplica-se a pressão de fechamento. No atuador do terceiro caso, a estrutura não possui uma região de rigidez reduzida, a deformação ocorre ao longo de todo o mecanismo, que assume um formato circular quando sob a pressão de fechamento.

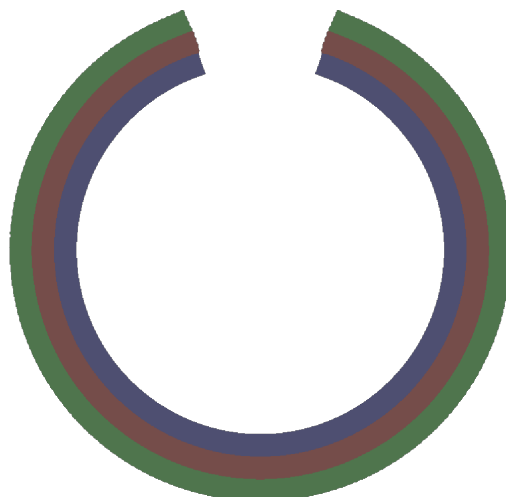


Figura 4.95 – Atuador Articulado Deformado - Terceiro Caso (Inicial)

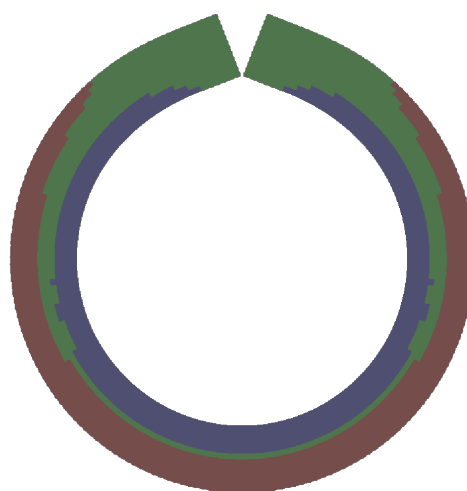


Figura 4.96 – Atuador Articulado Deformado - Terceiro Caso (Final)

Assim como nas outras subseções, os resultados observados foram satisfatórios. O método foi capaz de aprimorar o comportamento de todos os casos considerados de forma sistemática.

5 CONCLUSÃO

Todos os objetivos foram atingidos. O modelo físico dos atuadores e sua formulação para análise numérica através do MEF foram descritos. Um modelo multiescala, no qual cada célula é representada por um único elemento nas macrotopologias foi proposto. Considerando três funções-objetivo, *compliance* média, trabalho útil e transmitância mecânica, realizaram-se as análises de sensibilidade para as micro e macrotopologias, nos três casos considerados, microescala, macroescala e multiescala. O algoritmo BESO foi utilizado para desenvolver o programa de otimização topológica. Uma série de validações foi realizada. E alguns problemas propostos foram abordados.

A análise estrutural foi comparada com resultados obtidos no programa comercial ANSYS. Observaram-se pequenas diferenças para os casos não-lineares, com cargas elevadas. Estas foram atribuídas a sofisticções de análise realizadas pelo ANSYS, ocultas ao usuário. O carregamento hidrostático também foi validado com o ANSYS. A discrepância para o caso não-linear foi um pouco maior neste caso pois o programa comercial atualiza apenas a direção das cargas, e não o módulo, conforme o campo de deslocamentos varia.

As análises de sensibilidades foram comparadas com resultados obtidos pelo MDF. Os resultados foram satisfatórios, as maiores discrepâncias foram observadas nos elementos fluidos, quando os valores de pressão são elevados. De toda forma, os resultados foram consistentes e indicam que a formulação desenvolvida pode ser utilizada na otimização dos fluídoatuadores considerados.

Alguns problemas apresentados na literatura foram avaliados para verificar se o algoritmo de otimização foi bem implementado. Otimizou-se a *compliance* média para uma viga engastada-livre, a *compliance* média para uma viga biapoada multimaterial e a transmitância mecânica para um mecanismo flexível simples. Os resultados confirmaram a funcionalidade do programa desenvolvido. As diferenças observadas eram esperadas já que alguns dos modelos e métodos utilizados nas referências não são os mesmos dos utilizados neste trabalho.

Avaliou-se a qualidade de representação do modelo multiescala em dois problemas. Calibrados os parâmetros, o modelo foi capaz de representar bem a cinemática dos mecanismos. Quanto às funções-objetivo, o modelo mostrou-se adequado para trabalhar com o trabalho útil e inadequado para trabalhar com a transmitância mecânica. A inadequação para esta função é uma característica do modelo proposto, que busca apenas garantir que a cinemática do elemento representativo seja fiel à da topologia real, sem se preocupar com a energia de deformação do elemento. A imprecisão nesses valores de energia distorcem o valor da transmitância.

Durante esse processo de validação, as potencialidades do programa desenvolvido puderam ser notadas. Tem-se um programa que pode fazer análises multimateriais; em regi-

mes de grandes deslocamentos e deformações; com carregamentos hidrostáticos, dependentes do campo de deslocamentos. Utilizando o modelo representativo, pode-se avaliar com custo computacional reduzido grandes sistemas celulares, nos quais cada célula é definida por uma microtopologia própria.

Além da análise, o programa pode otimizar as micro e macrotopologias em todos os tipos de problema considerados. Isso inclui, como aplicações particulares, a otimização de: estruturas de sustentação, estruturas sob carregamento hidrostático, mecanismos flexíveis, fluídoatuadores genéricos. Em todos os problemas abordados, o método BESO mostrou-se eficaz.

Enfim, o programa desenvolvido foi utilizado para a concepção de diferentes tipos de mecanismos. Primeiramente, consideraram-se atuadores unicelulares, que expandem em direções especificadas. Obteve-se um conjunto de microtopologias otimizadas que foram usadas nos processos de otimização macroescala subsequentes.

Então, considerou-se o projeto de estrutura reativas. Essas estruturas devem resistir a um carregamento, anulando o deslocamento em um ponto de interesse através do controle da pressão aplicada. Após os processos de otimização observou-se que os mecanismos passaram a suportar cargas mais elevadas para um mesmo valor de pressão aplicada.

Em seguida, avaliou-se a concepção de constritores radiais, que comprimem um eixo em pontos de pressão designados. Os resultados foram muito positivos, com ganhos superiores a 100 % e convergências suaves da função-objetivo.

O último caso considerado foi o de atuadores articulados, que se dobram em torno de uma articulação. Conceberam-se atuadores semelhantes ao mecanismo de plantas násticas apresentado como motivação. Dois tipos de resultados foram obtidos: nos que permitiram a remoção de material (inserção de células vazias), observou-se que a deformação da estrutura foi concentrada nas proximidades da articulação, o que fez o atuador fechar em formato de gota; nos que não se alteraram a quantidade de material, a deformação foi mais bem distribuída pela estrutura, o que fez o atuador fechar de forma circular.

Em cada um dos casos multiescala, efetuaram-se todos os tipos de otimização: somente as microtopologias, somente as macrotopologias e ambas simultaneamente. Em todos os casos, os resultados foram satisfatórios, o programa obteve melhorias significativas na função-objetivo e forneceu *designs* eficazes para os mecanismos propostos.

Em trabalhos futuros seria interessante propor modelos mais acurados para a representação das células nas macrotopologias; avaliar a eficácia de outros métodos de otimização na abordagem dessa classe de problemas; e considerar problemas práticos, com materiais reais, restrições de tensão, limitações de fabricação.

REFERÊNCIAS

- AGARWAL, G. *et al.* Stretchable materials for robust soft actuators towards assistive wearable devices. **Scientific reports**, Nature Publishing Group, v. 6, p. 34224, 2016.
- BATHE, K.-J. **Finite Element Procedures**. Nova Jersey: Prentice Hall, 1996.
- BENDSØE, M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. **Structural optimization**, Springer, v. 1, n. 4, p. 193–202, 1989.
- BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 71, n. 2, p. 197–224, 1988.
- BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. Material interpolation schemes in topology optimization. **Archive of applied mechanics**, Springer, v. 69, n. 9-10, p. 635–654, 1999.
- BRUNS, T. E.; TORTORELLI, D. A. Topology optimization of non-linear elastic structures and compliant mechanisms. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 190, n. 26-27, p. 3443–3459, 2001.
- BURGER, M.; HACKL, B.; RING, W. Incorporating topological derivatives into level set methods. **Journal of Computational Physics**, Elsevier, v. 194, n. 1, p. 344–362, 2004.
- CHEN, W.-F.; SALEEB, A. F. **Constitutive Equations for Engineering Materials: Elasticity and Modeling**. Amsterdã: Elsevier, 2013. v. 37.
- CIARLET, P. G. Mathematical elasticity, volume 1: Three dimensional elasticity. **Studies in Mathematics and its Applications**, Elsevier Science Publishers B.V., v. 20, 1988.
- COOK, R. D. *et al.* **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. Nova Jersey: John Wiley & Sons, 2002. v. 4.
- CRISFIELD, M. A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, volume 1: Essentials**. Chichester: John Wiley & Sons, 1991.
- CRISFIELD, M. A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, volume 2: Advanced Topics**. Chichester: John Wiley & Sons, 1997.
- ESCHENAUER, H. A.; KOBELEV, V. V.; SCHUMACHER, A. Bubble method for topology and shape optimization of structures. **Structural optimization**, Springer, v. 8, n. 1, p. 42–51, 1994.
- FISTER JR, I. *et al.* A brief review of nature-inspired algorithms for optimization. **arXiv preprint arXiv:1307.4186**, 2013.
- FREEMAN, E.; WEILAND, L. M. High energy density nastic materials: Parameters for tailoring active response. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, Sage Publications Sage UK: London, England, v. 20, n. 2, p. 233–243, 2009.

GAO, T.; ZHANG, W. A mass constraint formulation for structural topology optimization with multiphase materials. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 88, n. 8, p. 774–796, 2011.

GAYNOR, A. T.; GUEST, J. K. Topology optimization considering overhang constraints: Eliminating sacrificial support material in additive manufacturing through design. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 54, n. 5, p. 1157–1172, 2016.

GUO, X.; ZHANG, W.; ZHANG, L. Robust structural topology optimization considering boundary uncertainties. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 253, p. 356–368, 2013.

GUO, X.; ZHANG, W.; ZHONG, W. Stress-related topology optimization of continuum structures involving multi-phase materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 268, p. 632–655, 2014.

HUANG, X.; XIE, Y. Bi-directional evolutionary topology optimization of continuum structures with one or multiple materials. **Computational Mechanics**, Springer, v. 43, n. 3, p. 393, 2009.

HUANG, X.; XIE, Y.-M. A further review of eso type methods for topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 41, n. 5, p. 671–683, 2010.

KANG, Z.; LIU, P.; LI, M. Topology optimization considering fracture mechanics behaviors at specified locations. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 55, n. 5, p. 1847–1864, 2017.

KUMAR, M. *et al.* Genetic algorithm: Review and application. **International Journal of Information Technology and Knowledge Management**, v. 2, n. 2, p. 451–454, 2010.

LEE, K.-H.; LEE, P.-S. Nonlinear hydrostatic analysis of flexible floating structures. **Applied Ocean Research**, Elsevier, v. 59, p. 165–182, 2016.

LEON, D. M. D. *et al.* Stress-constrained topology optimization for compliant mechanism design. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 52, n. 5, p. 929–943, 2015.

LUO, Z.; GAO, W.; SONG, C. Design of multi-phase piezoelectric actuators. **Journal of Intelligent Material Systems and Structures**, Sage Publications Sage UK: London, England, v. 21, n. 18, p. 1851–1865, 2010.

LV, J.; LIU, H.; ZHANG, H. A multiscale co-rotational method for geometrically nonlinear shape morphing of 2d fluid actuated cellular structures. **Mechanics of Materials**, Elsevier, v. 79, p. 1–14, 2014.

LV, J. *et al.* Topology optimization of adaptive fluid-actuated cellular structures with arbitrary polygonal motor cells. **Smart Materials and Structures**, IOP Publishing, v. 25, n. 5, p. 055021, 2016.

LV, J.; ZHANG, H.; CHEN, B. Shape and topology optimization for closed liquid cell materials using extended multiscale finite element method. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 49, n. 3, p. 367–385, 2014.

- MARKIN, V. S.; VOLKOV, A. G.; JOVANOVIĆ, E. Active movements in plants: Mechanism of trap closure by *Dionaea muscipula* Ellis. **Plant Signaling & Behavior**, Taylor & Francis, v. 3, n. 10, p. 778–783, 2008.
- MARSDEN, J. E.; HUGHES, T. J. **Mathematical Foundations of Elasticity**. Nova York: Dover, 1994.
- MAUTE, K.; FRANGOPOL, D. M. Reliability-based design of mems mechanisms by topology optimization. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 81, n. 8-11, p. 813–824, 2003.
- NETO, E. A. de S.; PERIC, D.; OWEN, D. R. **Computational Methods for Plasticity: Theory and Applications**. Singapura: John Wiley & Sons, 2011.
- NORATO, J. A. *et al.* A topological derivative method for topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 33, n. 4-5, p. 375–386, 2007.
- NOVOTNY, A. A. *et al.* Topological sensitivity analysis. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 192, n. 7-8, p. 803–829, 2003.
- PAGITZ, M.; LAMACCHIA, E.; HOL, J. Pressure-actuated cellular structures. **Bioinspiration & Biomimetics**, IOP Publishing, v. 7, n. 1, p. 016007, 2012.
- PAGITZ, M.; LEINE, R. I. Shape optimization of compliant pressure actuated cellular structures. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, Elsevier, v. 94, p. 268–280, 2017.
- PETER, K. Ansys theory reference manual, release 5.6. **Ansys Inc**, 1994.
- PETRA, C. G.; SCHENK, O.; ANITESCU, M. Real-time stochastic optimization of complex energy systems on high-performance computers. **IEEE Computing in Science & Engineering**, AIP Publishing, v. 16, n. 5, p. 32–42, 2014.
- PETRA, C. G. *et al.* An augmented incomplete factorization approach for computing the schur complement in stochastic optimization. **SIAM Journal on Scientific Computing**, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 36, n. 2, p. C139–C162, 2014.
- PICELLI, R.; VICENTE, W.; PAVANELLO, R. Bi-directional evolutionary structural optimization for design-dependent fluid pressure loading problems. **Engineering Optimization**, Taylor & Francis, v. 47, n. 10, p. 1324–1342, 2015.
- PLEŠEK, J.; KRUISOVÁ, A. Formulation, validation and numerical procedures for hencky's elasticity model. **Computers & structures**, Elsevier, v. 84, n. 17-18, p. 1141–1150, 2006.
- SETH, B. **Generalized Strain Measure with Applications to Physical Problems**. Madison, 1961.
- SIGMUND, O.; MAUTE, K. Topology optimization approaches. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 48, n. 6, p. 1031–1055, 2013.
- SIGMUND, O.; TORQUATO, S. Design of materials with extreme thermal expansion using a three-phase topology optimization method. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Elsevier, v. 45, n. 6, p. 1037–1067, 1997.

SILVA, G. da; BECK, A.; CARDOSO, E. Topology optimization of continuum structures with stress constraints and uncertainties in loading. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 113, n. 1, p. 153–178, 2018.

STOLPE, M.; SVANBERG, K. An alternative interpolation scheme for minimum compliance topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 22, n. 2, p. 116–124, 2001.

SVANBERG, K. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 24, n. 2, p. 359–373, 1987.

THOMSEN, C. R.; WANG, F.; SIGMUND, O. Buckling strength topology optimization of 2d periodic materials based on linearized bifurcation analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, 2018.

VOGIATZIS, P. *et al.* Topology optimization of multi-material negative poisson's ratio metamaterials using a reconciled level set method. **Computer-Aided Design**, Elsevier, v. 83, p. 15–32, 2017.

WANG, M. Y.; WANG, X.; GUO, D. A level set method for structural topology optimization. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 192, n. 1-2, p. 227–246, 2003.

WANG, Y. *et al.* Level-set topology optimization for multimaterial and multifunctional mechanical metamaterials. **Engineering Optimization**, Taylor & Francis, v. 49, n. 1, p. 22–42, 2017.

WEGST, U. G. *et al.* Bioinspired structural materials. **Nature materials**, Nature Publishing Group, v. 14, n. 1, p. 23, 2015.

XIA, Q.; WANG, M. Y.; SHI, T. Topology optimization with pressure load through a level set method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 283, p. 177–195, 2015.

XIAO, H. Hencky strain and hencky model: Extending history and ongoing tradition. **Multidiscipline Modeling in Materials and Structures**, Emerald Group Publishing Limited, v. 1, n. 1, p. 1–52, 2005.

XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. A simple evolutionary procedure for structural optimization. **Computers & structures**, Elsevier, v. 49, n. 5, p. 885–896, 1993.

YANG, X. *et al.* Bidirectional evolutionary method for stiffness optimization. **AIAA journal**, v. 37, n. 11, p. 1483–1488, 1999.

ZHOU, M.; ROZVANY, G. On the validity of eso type methods in topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, Springer, v. 21, n. 1, p. 80–83, 2001.